1. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 7.11.2007, Westbau SR.

Webseite: `demnächst`

Aufgabe 1 : Lorentz-Transformation

Bestimmen Sie die Matrix Λ für eine Lorentz-Transformation, die den 4er-Impuls eines Teilchens mit Masse m wie folgt transformiert:

$$(m, 0, 0, 0) \xrightarrow{\Lambda} (E, 0, 0, p) ,$$

mit $E = \sqrt{m^2 + p^2}$.

Aufgabe 2 : Darstellung der Generatoren der Lorentz-Gruppe als Differentialoperatoren

(a) Bestimmen Sie die Darstellung der Generatoren J_l und K_l ($l = 1, 2, 3$) der Lorentz-Gruppe als Differentialoperatoren, die auf ein Skalarfeld $\Phi(x)$ wirken, welches sich unter einer Lorentz-Transformation $\Lambda = \Lambda(\theta_l, \Phi_n)$ wie folgt transformiert:

$$\Phi(x) \xrightarrow{\Lambda} e^{-i\theta_l J_l - i\phi_n K_n} \Phi(x) = \Phi(\Lambda^{-1} x) .$$

Betrachten Sie hierzu infinitesimale Lorentz-Transformationen mit jeweils nur einem nicht-verschwindenden Parameter $\delta\theta_l$ bzw. $\delta\phi_n$.
Warnung: J_l und K_l sind **nicht** die Raumkomponenten eines 4er-Vektors (siehe Aufgabe 3). Deshalb gibt es hier auch keine oberen und unteren Indizes.

(b) Zeigen Sie, daß diese Differentialoperatoren,

$$\begin{aligned} J_1 &= -i(x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}) , \quad J_2 = -i(x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}) , \quad J_3 = -i(x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}) , \\ K_1 &= -i(x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^0}) , \quad K_2 = -i(x^0 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^0}) , \quad K_3 = -i(x^0 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^0}) , \end{aligned}$$

die Lorentz-Algebra

$$[J_l, J_m] = i\epsilon_{lmn} J_n , \qquad [K_l, K_m] = -i\epsilon_{lmn} J_n , \qquad [J_l, K_m] = i\epsilon_{lmn} K_n ,$$

erfüllen. Dabei ist ϵ_{lmn} total antisymmetrisch bezüglich Permutationen seiner Indizes und $\epsilon_{123} = 1$.

Aufgabe 3 : Poincaré-Gruppe

(a) Zeigen Sie mittels der Differentialoperator-Darstellung aus Aufgabe 2 und $P_\mu = i\partial_\mu$, daß

$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho)$$

gilt. Dabei ist $J_{\rho\sigma} = -J_{\sigma\rho}$, $J_{0l} = K_l$, $J_{12} = J_3$ und zyklisch.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Poincaré-Algebra, daß $P_\mu P^\mu$ mit allen Generatoren der Poincaré-Gruppe vertauscht.

Aufgabe 4 : Invariantes Integralmaß

Zeigen Sie, daß das Integralmaß $\dfrac{d^3p}{2E(\vec{p})}$ mit $E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ Poincaré-invariant ist

(a) durch Untersuchung seines Transformationsverhaltens unter expliziten Poincaré-Transformationen

und

(b) durch Zurückführung auf das manifest invariante Integralmaß $d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p^0)$.