2. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 14.11.2007, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 5 : Lagrangedichte mit Ableitungen zweiter Ordnung

Gegeben sei eine Klasse von Theorien mit der Wirkung

$$S[\phi] = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\nu \phi)$$

mit einem Skalarfeld $\phi(x)$.

Leiten Sie die Feldgleichung für solche Theorien,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi)} = 0 \,, \tag{1}$$

aus dem Prinzip der stationären Wirkung ab.

Betrachten Sie dazu die Variation $\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x)$, $\partial_\mu \phi(x) \to \partial_\mu \phi(x) + \partial_\mu \delta\phi(x)$, wobei die Variation $\delta\phi(x)$ im Limes $\max |x^\mu| \to \infty$ verschwinden soll, und fordern Sie $\delta S = S[\phi + \delta\phi] - S[\phi] \stackrel{!}{=} 0$.

Aufgabe 6 : Klein-Gordon-Gleichung

Die Dynamik eines Skalarfeldes sei durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\partial_\mu \partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda_3}{3}\phi^3 - \frac{\lambda_4}{4}\phi^4 \tag{2}$$

beschrieben.

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Feldgleichung unter Verwendung von Gleichung (1) aus Aufgabe 5.

(b) Bestimmen Sie Lösungen der freien Feldgleichung (d.h. der Feldgleichung aus (a) für $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$) durch den Ansatz ebener Wellen: $\phi(x) = e^{ik_\mu x^\mu}$. Der Ansatz führt auf eine algebraische Gleichung für k^μ. Bestimmen Sie die möglichen Relationen zwischen k^0 und $\vec{k}$, die sich aus dieser Gleichung ergeben.

(c) Zeigen Sie, daß die Lagrangedichte aus Gleichung (2) durch partielle Integration im Wirkungsintegral in eine Form $\mathcal{L}'$ übergeführt werden kann, die nur erste Ableitungen enthält. Gehen Sie dabei davon aus, daß das Feld $\phi(x)$ auf dem "Rand" (d.h. im Limes $\max |x^\mu| \to \infty$) verschwindet.

Überzeugen Sie sich, daß die aus $\mathcal{L}'$ folgende Feldgleichung identisch ist mit der in (a) bestimmten.

Aufgabe 7 : Lee-Wick Toy Model
Gegeben sei die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{1}{2M^2}(\partial_\mu \partial^\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \,. \qquad (3)$$

(a) Bestimmen Sie die Feldgleichung für $\phi(x)$ mit Gleichung (1) aus Aufgabe 5.

(b) Bestimmen Sie Lösungen der freien Feldgleichung (d.h. für $\lambda = 0$) durch den Ansatz $\phi(x) = e^{ik_\mu x^\mu}$ und bestimmen sie die möglichen Relationen zwischen k^0 und $\vec{k}$, welche die resultierende algebraische Gleichung lösen.

Aufgabe 8 : Massives Vektorfeld
Die Lagrangedichte für ein freies, massives Vektorfeld ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \,, \; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,.$$

(a) Bestimmen Sie die Feldgleichungen für die A^μ.

(b) Berechnen Sie die 4er-Divergenz der Feldgleichungen. Benutzen Sie die so erhaltene Identität um die Feldgleichungen so umzuformen, daß jede Komponente A^μ einer Klein-Gordon-Gleichung (wie in Aufgabe 6(b) bzw. 6(c)) genügt.