3. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 21.11.2007, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 9 : Innere Symmetrien einer Theorie mit 3 Skalarfeldern

Die Lagrangedichte für drei reelle skalare Felder ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 sei

$$\mathcal{L} = \sum_i (\partial_\mu \phi_i)(\partial^\mu \phi_i) - m^2 \sum_i \phi_i^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\sum_i \phi_i^2\right)^2$$

(a) Bestimmen Sie die Feldgleichungen für die ϕ_i, die aus dem Prinzip der stationären Wirkung folgen.

(b) Bestimmen Sie die zu $\mathcal{L}$ gehörige Hamiltondichte $\mathcal{H}$.

(c) Unter welchen inneren Symmetrietransformationen ist $\mathcal{L}$ invariant?
Geben Sie für die kontinuierlichen Transformationen explizit die infinitesimalen Transformationen der Felder ϕ_i an.
Wieviele solche linear unabhängige Transformationen gibt es?

(d) Bestimmen Sie die Generatoren T_a dieser kontinuierlichen Transformationen in dem Sie die Transformationen in der Form

$$\phi_i(x) \to [e^{i\sum_a \alpha_a T_a}]_{ij}\phi_j(x)$$

mit infinitesimalen Parametern α_a betrachten. Dabei sind die T_a (3×3)-Matrizen im Raum der Felder. Geben Sie die Algebra dieser Generatoren an.

(e) Wie lauten die aus diesen Symmetrien folgenden 4er-Stromdichten lokal erhaltener Größen j_a^μ ?
Überprüfen Sie mittels der Feldgleichungen, daß in der Tat $\partial_\mu j_a^\mu$ gilt.

Aufgabe 10 : Impuls und Drehimpuls eines freien Skalarfeldes

Gegeben sei ein reelles Skalarfeld $\phi(x)$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \,.$$

(a) Bestimmen Sie (wie in der Vorlesung) die zu den Translationen ($x^\mu \to x^\mu + a^\mu$) korrespondierenden Noetherströme $j^\mu{}_\nu$. Der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ ist dann (abweichend zur Angabe in der Vorlesung) $-j^\mu{}_\nu$.

(b) Zeigen Sie, daß T^{00} der zu $\mathcal{L}$ korrespondierenden Hamiltondichte $\mathcal{H}$ entspricht.

(c) Bestimmen Sie aus der Invarianz von $\mathcal{L}$ bezüglich allgemeiner Lorentz-Transformationen (mit den Parametern $\omega^{\alpha\beta}$) die zugehörigen Noetherströme $\mathcal{J}^{\mu}{}_{\alpha\beta} := -j^{\mu}{}_{\alpha\beta}$. Dabei entspricht $j^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ der Definition des Noetherstroms in der Vorlesung.
Drücken Sie $\mathcal{J}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ durch die Koordinaten x und den Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ aus.

Hinweise: Eine allgemeine Lorentztransformation eines 4er-Vektors v^{μ} ist beschrieben durch

$$v^{\mu} \to \Lambda(\omega)^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu} = \left[e^{-\frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(J^{(f)}_{\alpha\beta})} \right]^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu} \,, \tag{1}$$

mit $J^{(f)}_{\alpha\beta} = i(g^{\mu}{}_{\alpha} g_{\beta\nu} - g^{\mu}{}_{\beta} g_{\alpha\nu})$.
Es ist angebracht die auftretende Summe über α und β, $\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}$, für die Bestimmung der Noetherströme auf die Form $\sum_{\alpha,\beta\,(\alpha<\beta)}$ zu bringen, so daß jeder unabhängige Parameter $\omega^{\alpha\beta}$ nur einmal vorkommt.

(d) Welche physikalische Bedeutung haben die zu $\mathcal{J}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ gehörgien erhaltenen Ladungen:

$$L^{\mu\nu} := \int d^3x \; \mathcal{J}^{0\mu\nu} \; ?$$

Diskutieren Sie L^{ij} und L^{0k} separat.

Aufgabe 11 : Drehimpuls eines freien massiven Vektorfeldes
Die Lorentz-invariante Lagrangedichte des freien massiven Vektorfeldes lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_{\mu} A^{\mu} \,, \; F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \,.$$

(a) Bestimmen Sie die zur Lorentz-Invarianz von $\mathcal{L}$ korrespondierenden Noetherströme $\mathcal{J}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$.

Hinweis: Beachten Sie, daß hier sowohl die Koordinaten x^{μ} als auch die Komponenten des Vektorfeldes A^{μ} gemäß Gleichung (1) aus Aufgabe 10 transformieren.

(b) Überzeugen Sie sich, unter Verwendung der Proca-Gleichung, daß $\partial_{\mu} \mathcal{J}^{\mu}{}_{\alpha\beta} = 0$ gilt.

Aufgabe 12 : Polarisationsvektoren des massiven Vektorfeldes
Aus den drei Polarisationsvektoren $\epsilon^{(\lambda)}_{\mu}(k)$ eines massiven Vektorfeldes wird der Tensor

$$P_{\mu\nu}(k) = \sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_{\mu}(k) \epsilon^{(\lambda)}_{\nu}(k)$$

konstruiert. Zeigen Sie, daß $P_{\mu\nu}$ die folgende Lorentz-kovariante Form hat:

$$P_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{m^2} \,.$$

Gehen Sie dazu vom Ruhesystem $(k_{\mu}) = (m, 0, 0, 0)$ aus und betrachten sie der Einfachheit halber nur einen Boost in z-Richtung, der k in $(k_{\mu}) = (\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}, 0, 0, |\vec{k}|)$ überführt.