4. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 28.11.2007, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 13 : Irreduzible Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Die Generatoren der eigentlichen ($\det \Lambda = 1$), orthochronen (${\Lambda^0}_0 \geq 1$) Lorentz-Gruppe, K_l und J_l, erfüllen die Algebra:

$$[J_l, J_m] = i\epsilon_{lmn} J_n\,, \qquad [K_l, K_m] = -i\epsilon_{lmn} J_n\,, \qquad [J_l, K_m] = i\epsilon_{lmn} K_n\,.$$

(a) Zeigen Sie damit, daß die (komplexen) Linearkombinationen

$$A_l := \frac{1}{2}(J_l + iK_l) \quad \text{und} \quad B_l := \frac{1}{2}(J_l - iK_l)\,, \tag{1}$$

jeweils eine Drehimpuls-Algebra (bzw. SU(2)-Algebra) erfüllen und untereinander vertauschen:

$$[A_l, A_m] = i\epsilon_{lmn} A_n\,, \qquad [B_l, B_m] = i\epsilon_{lmn} B_n\,, \qquad [A_l, B_m] = 0\,.$$

Der Eigenwert des zur Algebra der A_l bzw. B_l gehörigen Casimir-Operators $\vec{A}^2$ bzw. $\vec{B}^2$ ist $j_A(j_A+1)$ bzw. $j_B(j_B+1)$ mit $j_A, j_B \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ und charakterisiert jeweils eine irreduzible Darstellung der zugehörigen Gruppe SU(2). Jedes Wertepaar (j_A, j_B) charakterisiert genau eine $(2j_A+1)(2j_B+1)$-dimensionale irreduzible Darstellung der eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe.

(b) Zeigen Sie, daß in der (j_A, j_B)-Darstellung der Lorentz-Gruppe der maximale Eigenwert von $\vec{J}^2$ den Wert $j(j+1)$ mit $j = j_A + j_B$ hat.

(c) Geben Sie explizit eine Darstellung der K_l und J_l in der $(\frac{1}{2}, 0)$- und $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung an. Berechnen Sie für beide Darstellungen die Darstellung eines Boosts $D(\phi)$, der einen 4er-Impuls im Ruhesystem, $(m, \vec{0})$, in $(E, \vec{p})$ mit $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ überführt:

$$D(\phi) = e^{-i(\vec{K}\cdot\vec{n})\phi}\,.$$

Dabei ist $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$, $\tanh\phi = |\vec{p}|/E$ und $\vec{K}\cdot\vec{n} = \sum_l K_l n^l$ (Für K_l und J_l machen wir keine Unterscheidung oberer und unterer Indizes). Geben Sie die Ergebnisse fuer $D_{(\frac{1}{2},0)}(\phi)$ und $D_{(0,\frac{1}{2})}(\phi)$ in Abhängigkeit von $m, \vec{p}$ und E an.

Hinweise : Mit den Pauli-Matrizen σ^i kann man eine 2-dimensionale Darstellung der Generatoren der Drehgruppe (bzw. der Gruppe SU(2)) angeben: $\frac{1}{2}\sigma^i$. Die Pauli-Matrizen erfüllen die Relation $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbf{1} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$. Die Matrix $D(\phi)$ läßt sich in der Form $D(\phi) = a\mathbf{1} + b^i\sigma^i$ mit Koeffizienten a, b^i schreiben.

(d) Zeigen Sie, daß die durch die A_l generierte Gruppe unter einer Raumspiegelung in die durch die B_l generierte Gruppe übergeht und umgekehrt. (Insbesondere bedeutet das, daß die $(\frac{1}{2},0)$- und $(0,\frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentz-Gruppe bei Raumspiegelung ineinander übergehen.)

<u>Hinweis :</u> Zur Bestimmung des Transformationsverhaltens von K_l und J_l bei Raumspiegelung können Sie die Raumspiegelung von ${J^\mu}_\nu$:

$$ {J^\mu}_\nu \to {(\mathcal{P}^{-1})^\mu}_\alpha {J^\alpha}_\beta {\mathcal{P}^\beta}_\nu \,, $$

mit $({\mathcal{P}^\mu}_\nu) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ betrachten.

Aufgabe 14 : Dirac-Gleichung

Der Darstellungsraum der Lorentz-Gruppe für ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ in Verbindung mit Spiegelungen ist eine direkte Summe $(0,\frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2},0)$. Das zugehörige Feld $\Psi(\vec{p})$ im Impulsraum ist zusammengesetzt aus zwei 2-komponentigen Feldern $\xi(\vec{p})$ und $\eta(\vec{p})$:

$$ \Psi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \xi(\vec{p}) \\ \eta(\vec{p}) \end{pmatrix} , $$

wobei $\xi(\vec{p})$ bezüglich der $(0,\frac{1}{2})$- und $\eta(\vec{p})$ bezüglich der $(\frac{1}{2},0)$-Darstellung transformiert.

(a) Im Ruhesystem sei der Dirac-Spinor $\Psi(0)$ Eigenvektor zur Paritätsoperation

$$ P\Psi_\pm(0) = \pm\Psi_\pm(0) \,. \tag{2} $$

Nach Aufgabe 13(d) gilt $P\xi(0) = \eta(0)$ und $P\eta(0) = \xi(0)$. Wie muß man $\eta(0)$ in Gleichung (2) wählen um ein Ψ_+ bzw. Ψ_- zu erhalten ?

(b) Bestimmen Sie den Spinor $\Psi_+(\vec{p}) = (\xi(\vec{p}), \eta(\vec{p}))^T$, der aus dem in Aufgabe 13(c) beschriebenen Boost aus $\Psi_+(0)$ hervorgeht.
Zeigen Sie, daß der Zusammenhang zwischen $\xi(\vec{p})$ bzw. $\eta(\vec{p})$ und $\xi(0)$ die folgende Form hat:

$$ \xi(\vec{p}) = \frac{(E+m)\mathbf{1} + (\vec{\sigma}\vec{p})}{\sqrt{2m(E+m)}}\, \xi(0) \,, \qquad \eta(\vec{p}) = \frac{(E+m)\mathbf{1} - (\vec{\sigma}\vec{p})}{\sqrt{2m(E+m)}}\, \xi(0) \,. $$

(c) Leiten Sie, durch geeignete Anwendung von $\frac{1}{m}(E\mathbf{1} \pm \vec{\sigma}\vec{p})$ auf die Gleichungen in (b), einen Zusammenhang zwischen $\xi(\vec{p})$ und $\eta(\vec{p})$ her.
<u>Hinweis :</u> Beachten Sie die Eigenschaften der Pauli-Matrizen, die in Aufgabe 13(c) angegeben wurden.

(d) Schreiben Sie Ihre Ergebnisse aus (c) in der Form einer (4×4)-Matrix, welche auf den Dirac-Spinor Ψ_+ wirkt. Sie sollten nun in der Lage sein, Ihre Ergebnisse in der Form

$$ (\gamma^\mu p_\mu - m\mathbf{1})\; \Psi_+(\vec{p}) = 0 \,, $$

mit den γ^μ in der chiralen Darstellung, zu schreiben. Das ist die Dirac-Gleichung im Impulsraum für Dirac-Spinoren positiver Energie. Man erhält analog $(\not{p}+m)\Psi_-(\vec{p}) = 0$. Wenn Sie wollen, können Sie noch in den Ortsraum gehen.