5. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 5.12.2007, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 15 : Die Pauli-Jordan-Distribution

Für den Kommutator zwischen Feldoperatoren $\hat{\phi}(x)$ und $\hat{\phi}(y)$ eines freien, reellen Skalarfeldes an zwei Raumzeitpunkten x und y gilt

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = i\Delta(x-y)\,.$$

Dabei ist die Pauli-Jordan-Distribution $\Delta(x)$ eine spezielle Lösung der freien Klein-Gordon-Gleichung:

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k \big[\theta(k^0) - \theta(-k^0)\big]\delta(k^2-m^2)e^{-ikx}\,.$$

Ziel dieser Aufgabe ist es diese Distribution explizit im Ortsraum zu berechnen.

(a) Bringen Sie $\Delta(x)$ zunächst in die Form

$$\Delta(x) = \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}F(x^0, r) \;\text{ mit }\; F(x^0,r) = \int_0^\infty dk\; f(k, x^0, r)\,, \tag{1}$$

$r = |\vec{x}|$ und $k = |\vec{k}|$. Nutzen die Symmetrie des Integranden $f(k, x^0, r)$ um das Integrationsgebiet auf die gesamte reelle Achse zu erweitern und substituieren Sie dann $k = m\sinh\eta$, so daß sie folgende Form erhalten:

$$F(x^0, r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\; g(\eta, x^0, r)$$

<u>Hinweis:</u> Beachten Sie hier und im Weiteren Relationen zwischen den trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen und Additionstheoreme.

(b) Zeigen Sie, daß $\Delta(x)$ für raumartige Vierervektoren x (d.h. $x^2 < 0$) verschwindet. Was läßt sich daraus über die gleichzeitige Meßbarkeit des Feldes an räumlich voneinander getrennten Orten schließen?

(c) Bestimmen Sie $\Delta(x)$ für zeitartige x (d.h. $x^2 > 0$). Benutzen Sie dazu ihr Ergebnis aus Aufgabe 15(a)und identifizieren Sie Ihr Resultat mit Hilfe folgender Integraldarstellung der Besselfunktionen:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \sin(z\cosh t - \frac{n\pi}{2})\cosh(nt)\,,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(d) Zeigen Sie, ausgehend von Gleichung (1), daß $\Delta(x)$ für $m = 0$ außerhalb des Lichtkegels, d.h. für $x^2 \neq 0$, verschwindet.

Aufgabe 16 : Greensche Funktion der Maxwell-Gleichung in axialer Eichung
Die aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(n_\mu A^\mu)^2 \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

folgende Feldgleichung ist äquivalent zur freien Maxwellgleichung in Verbindung mit der Zusatzforderung, daß das Feld A^μ die axiale Eichung, $n_\mu A^\mu = 0$, erfüllt. Dabei ist λ ein reeller Parameter und n_μ ein beliebiger, fest gewählter Vierervektor.

(a) Bestimmen Sie die Feldgleichungen für A^μ, $\mathcal{D}^{(x)}_{\mu\nu}A^\nu(x) = 0$, aus dem Prinzip der stationären Wirkung. Die Vorzeichen seien so gewählt, daß der Differentialoperator $\mathcal{D}^{(x)}_{\mu\nu}$ die Form $(-g_{\mu\nu}\Box + \cdots)$ hat.

(b) Die Greensche Funktion im Ortsraum, $G^{\nu\rho}(x-y)$, sei definiert durch

$$\mathcal{D}^{(x)}_{\mu\nu}G^{\nu\rho}(x-y) = -g_\mu{}^\rho\delta^4(x-y)\,.$$

Zeigen Sie, daß die kausale Greensche Funktion im Impulsraum die Form

$$\tilde{G}^{\nu\rho}(q) = \frac{1}{q^2 + i\epsilon}\left[-g^{\nu\rho} + \frac{q^\nu n^\rho + q^\rho n^\nu}{q\cdot n} - \frac{(q^2 + \lambda n^2)}{\lambda(q\cdot n)}\,q^\nu q^\rho\right]$$

hat.

Aufgabe 17 : Greensche Funktion der Dirac-Gleichung
Bestimmen Sie die kausale Greensche Funktion der Dirac-Gleichung im Ortsraum $S_{ab}(x-y)$ als Fourierintegral

$$S_{ab}(x-y) = \int d^4q\,\tilde{S}(q)e^{-iq(x-y)}\,.$$

Diese ist durch die Gleichung

$$(i\partial\!\!\!/ - m)_{ab}S_{bc}(x-y) = \delta_{ac}\delta^4(x-y)$$

und die Vorschrift $m \to m - i\epsilon$ zur Umgehung der Pole in der q^0-Integration definiert. Überzeugen Sie sich, daß letztere Vorschrift zur gleichen infinitesimalen Verschiebung der Pole in die komplexe Ebene führt, wie die in der Vorlesung angegebene für die kausale Greensche Funktion des Skalarfeldes.