7. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 19.12.2007, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 21 : Der erhaltene Strom des komplexen Skalarfeldes
Die Lagrangedichte des komplexen freien Skalarfeldes, mit der Fourierzerlegung

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2k^0} \left[a(\vec{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right] ,$$

ist invariant unter der inneren Symmetrietransformation:

$$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x), \phi^\dagger(x) \to e^{-i\alpha}\phi^\dagger(x), \alpha \in \boldsymbol{R}.$$

Der zugehörige erhaltene Strom des komplexen Skalarfeldes ist gegeben durch

$$j^\mu(x) = i\mathbf{:}[\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x) - (\partial^\mu\phi^\dagger(x))\phi(x)]\mathbf{:}\,.$$

(a) Drücken Sie den Ladungsoperator $Q = \int d^3x\, j^0(x)$ durch die Erzeuger- und Vernichteroperatoren a, $a^\dagger$, b und $b^\dagger$ aus.

(b) Überprüfen Sie die zeitliche Erhaltung des Ladungsoperators durch Nachweis, daß Q mit dem Hamiltonoperator,

$$H = \int \frac{d^3k}{2k^0} \left[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \right] k^0$$

kommutiert: $[Q, H] = 0$.

(c) Berechnen Sie den Kommutator $[Q, \phi(x)]$ und zeigen Sie damit, daß die oben angegebene Symmetrietransformation durch die Operatortransformation

$$\phi(x) \to e^{-i\alpha Q}\phi(x)e^{i\alpha Q}$$

gegeben ist.

Aufgabe 22 : Quantisiertes freies Diracfeld
Ein quantisiertes freies Diracfeld sei gegeben durch die Fourierzerlegung

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0} \sum_{r=1,2} \left[c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{ipx} \right] , \tag{1}$$

mit Erzeuger- und Vernichteroperatoren $c_r(\vec{p})$ und $d_r^\dagger(\vec{p})$ und Dirac-Spinoren $u_r(\vec{p})$ und $v_r(\vec{p})$, und erfüllt somit die Dirac-Gleichung: $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0$.

(a) Zeigen Sie, daß der Hamiltonoperator in der Form

$$H = \int d^3x \, \psi^\dagger(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) \tag{2}$$

geschrieben werden kann.

(b) Setzen Sie die Fourierzerlegung (1) in Gleichung (2) ein und bestimmen Sie den Hamiltonoperator als ein Impulsintegral über die Erzeuger $c_r^\dagger(\vec{p}), d_r^\dagger(\vec{p})$ und Vernichter $c_r(\vec{p}), d_r(\vec{p})$ ohne Normalordnung.
<u>Hinweis</u>: Verwenden Sie die in Kap. 2.3.3. der Vorlesung angegebenen Relationen für Dirac-Spinoren und zusätzlich $v_r^\dagger(\vec{p}) u_{r'}(-\vec{p}) = u_r^\dagger(\vec{p}) v_{r'}(-\vec{p}) = 0$.

(c) Betrachten Sie die diskretisierte Version des Hamiltonoperators aus (b) und führen Sie dabei eine neue Normierung fuer die Erzeuger und Vernichter ein:

$$c_r(\vec{p}) \to \frac{c_{r,\vec{p}}}{\sqrt{\Delta V_{\vec{p}}}} = \frac{\tilde{c}_{r,\vec{p}}}{\sqrt{\Delta V_{\vec{p}}}} \sqrt{2p^0}\,, \qquad d_r(\vec{p}) \to \frac{d_{r,\vec{p}}}{\sqrt{\Delta V_{\vec{p}}}} = \frac{\tilde{d}_{r,\vec{p}}}{\sqrt{\Delta V_{\vec{p}}}} \sqrt{2p^0}\,.$$

Überzeugen Sie sich, daß die Annahme der Gültigkeit „bosonischer“ Vertauschungsrelationen (d.h. $[\tilde{c}_{r,\vec{p}}, \tilde{c}^\dagger_{r',\vec{p}'}] = [\tilde{d}_{r,\vec{p}}, \tilde{d}^\dagger_{r',\vec{p}'}] = \delta_{r,r'}\delta_{\vec{p},\vec{p}'}$ und verschwindende Kommutatoren sonst) auf Zustände negativer Energie führen würde.

(d) Gehen Sie nun vom Postulat der folgenden kovarianten Anti-Vertauschungsrelationen aus:

$$\{c_r(\vec{p}), c^\dagger_{r'}(\vec{p}')\} = 2p^0 \delta_{r,r'}\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\,, \qquad \{d_r(\vec{p}), d^\dagger_{r'}(\vec{p}')\} = 2p^0 \delta_{r,r'}\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\,, \tag{3}$$

und verschwindende Antikommutatoren sonst. Überzeugen Sie sich damit, daß der (normalgeordnete) Hamiltonoperator im Kontinuum

$$H = \int d^3x \;\, {:}\psi^\dagger(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x){:}$$

nun keine Zustände mit negativer Energie mehr beschreibt.

(e) Zeigen Sie unter Verwendung der Anti-Vertauschungsrelationen (3) für die Erzeuger und Vernichter, daß für das Dirac-Feld $\psi_a(x)$ und den dazu kanonisch konjugierten Impuls $\Pi_a(x)$ die kanonische Anti-Vertauschungsrelation

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = i\delta_{ab}\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

gilt. Dabei bezeichnen a und b Indizes im Spinorraum.