10. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 23.1.2008, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 29 : Propagator des massiven Vektorfeldes

Für ein massives Vektorfeld A^μ ist der Vakumerwartungswert des naiven T-Produkts gegeben durch

$$\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|A^\nu(y)A^\mu(x)|0\rangle\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß diese Definition auf eine Summe aus der kovarianten Greensfunktion der Proca-Gleichung,

$$iD^{\mu\nu}(x-y) := i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\left(-g^{\mu\nu}+\dfrac{q^\mu q^\nu}{m^2}\right)}{q^2-m^2+i\epsilon}e^{-iq(x-y)} = \Big(-g^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu_{(x)}\partial^\nu_{(x)}}{m^2}\Big)iD_F(x-y)\,,$$

und einem nicht-kovarianten Ausdruck führt.

(b) Zeigen Sie, dass der nicht-kovariante Ausdruck eine Verteilung ist, die für $x \neq y$ verschwindet.

(c) Die Lagrangedichte für ein massives Vektorfeld in Wechselwirkung mit einer Stromdicht J^μ ist:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - J_\mu A^\mu\,.$$

Bestimmen Sie die zugehörige Hamiltondichte als Funktion der kanonischen Impulse $\Pi^l = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^l)}$ und A^l. Eliminieren Sie dazu $\partial^0 A^l$ zugunsten von Π^l und $\partial^l A^0$ und eliminieren Sie dann auch das Feld A^0 zugunsten von J^0 und Π^l.
Identifizieren Sie den freien Anteil $\mathcal{H}_0$ und den Wechselwirkungsanteil $\mathcal{H}_{\text{int}}$ der Hamiltondichte. (Der nicht-kovariante Term $\propto (J^0)^2$ kompensiert den nicht-kovarianten Anteil des Propagators aus (a).)
Hinweise: Sie erhalten eine Gleichung für A^0 als Funktion von J^0 und $\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}$ aus der Feldgleichung für A^μ. Verwenden Sie $F^{kl}F_{kl} = 2(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2$.

Aufgabe 30 : Abelsches Higgs-Modell

Das Abelsche Higgs-Modell für klassische Felder ist durch folgende Lagrangedichte gegeben:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\star(D^\mu\phi) - A\phi^\star\phi - B(\phi^\star\phi)^2\,, \tag{1}$$

mit $D_\mu = \partial_\mu - igQA_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und Kopplungskonstanten g, A und B.

(a) Überzeugen Sie sich, daß diese Lagrangedichte invariant ist unter lokalen Eichtransformationen:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) e^{igQ\lambda(x)}\,, \qquad A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \lambda(x)\,, \tag{2}$$

mit einer beliebigen Funktion $\lambda(x)$.

(b) Benutzen Sie für das komplexe Skalarfeld die Parametrisierung $\phi(x) = (\eta(x) + i\xi(x))/\sqrt{2}$ und identifizieren Sie in $\mathcal{L}$ den freien Anteil $\mathcal{L}_0$ und den Wechselwirkungsanteil $\mathcal{L}_{\text{int}}$. Lesen Sie von $\mathcal{L}_0$ das Teilchenspektrum der freien quantisierten Theorie ab.

(c) Zeigen Sie, daß für $A < 0$ und $B > 0$ das Potential $V(|\phi|) = A|\phi|^2 + B|\phi|^4$ des Skalarfeldes ein Minimum bei nicht-verschwindenden Feldwerten $|\phi| = v$ hat. Bestimmen Sie v. Tatsächlich ist die Energiedichte dieser Theorie in diesem Fall minimal, wenn gleichzeitig $\partial^\mu \phi(x) = 0$ und $A^\mu = 0$ ist.

(d) Die Feldkonfiguration niedrigster Energie in der klassischen Theorie korrespondiert zum Vakuumzustand in der quantisierten Theorie. Um für den Fall $A < 0$ und $B > 0$ das korrekte Teilchenspektrum der freien quantisierten Theorie abzulesen, nehmen Sie folgende Umparametrisierung in der Lagrangedichte (1) vor: $\phi(x) = (v + \rho(x))e^{i\varphi(x)}$. Für verschwindende Feldanregungen ist das System nun im Zustand minimaler Energie.

(e) Bestimmen Sie welche mathematische Form die Eichtransformationen (2) nun für die Felder $A^\mu(x), \rho(x)$ und $\varphi(x)$ annehmen. Zeigen Sie, daß das Feld $\varphi(x)$ durch eine geeignete Eichtransformation völlig eliminert werden kann. Führen Sie diese Eichtransformation in der in (d) erhaltenen Lagrangedichte aus und identifizieren Sie den freien Anteil $\mathcal{L}_0$ und den Wechselwirkungsanteil $\mathcal{L}_{\text{int}}$ für die transformierten Felder $A'^\mu(x)$ und $\rho'(x)$. Lesen Sie von $\mathcal{L}_0$ das Teilchenspektrum der freien quantisierten Theorie ab.

Aufgabe 31 : Wirkungsquerschnitt einer Zwei-Teilchen-Reaktion

Der differentielle Wirkungsquerschnitt einer Zwei-Teilchen-Reaktion

$$a(p_a) + b(p_b) \to c(p_c) + d(p_d)$$

ist bei geeigneter Normierung des Übergangsmatrixelements $T_{fi} = T_{a+b\to c+d}$ gegeben durch

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{10}}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} |T_{fi}|^2 \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) \frac{d^3p_c}{2p_c^0}\frac{d^3p_d}{2p_d^0}\,.$$

Bestimmen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\dfrac{d\sigma}{d\Omega_c}$ im Schwerpunktssystem als Funktion von $s = (p_a + p_b)^2$ und $t = (p_a - p_c)^2$. Dabei ist $d\Omega_c$ der Raumwinkelanteil der $\vec{p}_c$-Integration, d.h. $d^3p_c = d\Omega_c d|\vec{p}_c||\vec{p}_c|^2$.