11. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 30.1.2008, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 32 : Komplexe Konjugation und Spuren von Dirac-Matrizen

Beweisen Sie, mit Hilfe der Formeln aus Kapitel 2.3.3 der Vorlesung, folgende Formeln für Dirac-Spinoren (w steht für u oder v):

$$\begin{aligned}
(\bar{w}_1 \gamma_\mu w_2)^\star &= \bar{w}_2 \gamma_\mu w_1\,, \\
(\bar{w}_1 \gamma_\mu w_2)(\bar{w}_2 \gamma_\nu w_1) &= \mathrm{Sp}[(w_1 \bar{w}_1)\gamma_\mu (w_2 \bar{w}_2)\gamma_\nu]\,, \\
\mathrm{Sp}[\not{a}\not{b}] &= 4ab\,, \\
\mathrm{Sp}[\not{a}\gamma_\mu \not{b}\gamma_\nu] &= 4(a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu - (ab) g_{\mu\nu})\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 33 : Zerfall des Higgs-Bosons in Fermionen

Der Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte des Standardmodells für die Yukawa-Wechselwirkung des Higgs-Bosons mit Fermionen f ist:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x) = -\sum_f \frac{e}{\sin\theta_w} \frac{m_f}{m_W}\, \phi(x) \bar{\psi}_f(x) \psi_f(x)\,.$$

Dabei repräsentiert das reelle Skalarfeld $\phi(x)$ die Higgs-Boson-Freiheitsgrade und die Dirac-Felder $\psi_f(x)$ die Freiheitsgrade der Fermionen, bestehend aus geladenen Leptonen (e, μ, τ) und Quarks (d, u, s, c, b, t). Ziel dieser Aufgabe ist es die partiellen Zerfallsbreiten,

$$\Gamma_{i\to f} = \int d\Gamma_{fi} \qquad \text{mit} \qquad d\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^7}{2m_H} |T_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) d\Phi_f\,, \tag{1}$$

für den Zerfall des Higgs-Bosons H im Ruhesystem in Fermionen f in Bornscher Näherung zu bestimmen. Dabei ist $P_i = p_a = (m_a, \vec{0})$ und $P_f = p_b + p_c$.

(a) Mit den Zuständen $|H, p_a\rangle$ für das Higgs-Boson im Anfangszustand und $|f, p_b, \sigma_b;\ \bar{f}, p_c, \sigma_c\rangle$ für das Fermion–Anti-Fermion-Paar im Endzustand, lautet das S-Matrixelement in Bornscher Näherung:

$$S_{fi} = -i \int d^4x\, \langle f, p_b, \sigma_b;\ \bar{f}, p_c, \sigma_c | \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x) | H, p_a\rangle\,,$$

wobei in $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ freie Felder einzusetzen sind. Bestimmen Sie daraus, gemäß den Konventionen aus der Vorlesung, zunächst einen Ausdruck für das von den Spin-Polarisationen abhängende T-Matrixelement $T_{fi}(p_b, \sigma_b, p_c, \sigma_c, p_a)$. Berechnen Sie dann das Spin-summierte quadrierte Matrixelement:

$$|T_{fi}|^2(p_b, p_c, p_a) = \sum_{\sigma_b, \sigma_c = \pm\frac{1}{2}} |T_{fi}(p_b, \sigma_b, p_c, \sigma_c, p_a)|^2\,. \tag{2}$$

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie Ergebnisse aus Aufgabe 32.

(b) Die Quarks tragen einen weiteren diskreten inneren Freiheitsgrad („Farbe“), für den es drei mögliche Werte (z.B. „rot“, „grün“, „blau“) gibt. Da ein Higgs-Boson „farbneutral“ ist, muß das bei einem Higgs-Zerfall in $q\bar{q}$ produzierte Anti-Quark immer genau die Anti-Farbe („anti-rot“, etc.) des entsprechenden Quarks tragen. Da die Farbe der Quarks im Endzustand nicht detektiert werden kann, ist das quadrierte Matrixelement in Gl. (2), welches von Farbfreiheitsgraden nicht abhängt, für den realistischen Endzustand noch über die Farb-Freiheitsgrade zu summieren. Geben Sie für Zerfälle $H \to q\bar{q}$ das Farb-summierte quadrierte Matrix-Element an und verwenden Sie dieses im Folgenden.

(c) Zur Bestimmung der partiellen Zerfallsbreiten $\Gamma_{H\to f\bar{f}}$ führen Sie nun die Phasenraumintegration in (1) mit $d\Phi_f = \dfrac{d^3p_b}{2p_b^0}\dfrac{d^3p_c}{2p_c^0}$ komplett aus.

(d) Nun betrachten wir ein Higgs-Boson mit Masse $m_H = 90$ GeV. In diesem Fall ist die totale Zerfallsbreite Γ_H in guter Näherung die Summe der partiellen Zerfallsbreiten der Zerfälle in die schwersten Fermion–Anti-Fermion-Paare, die noch kinematisch erlaubt sind; hier:

$$\Gamma_H \approx \sum_{f=b,c,\tau} \Gamma_{H\to f\bar{f}}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Higgs-Boson z.B. in ein Paar $f\bar{f}$ zerfällt ist durch des sog. Verzweigunsverhältnis („branching ratio“) BR$(H \to f\bar{f})$=$\Gamma_{H\to f\bar{f}}/\Gamma_H$ gegeben. Bestimmen Sie BR$(H \to b\bar{b})$, BR$(H \to c\bar{c})$, BR$(H \to \tau^-\tau^+)$ und BR$(H \to e^-e^+)$. Hinweis: Verwenden Sie für die Massen der Fermionen: $m_b = 4.7$ GeV, $m_\tau = 1.78$ GeV, $m_c = 1.25$ GeV, $m_e = 0.511 \cdot 10^{-3}$ GeV.

Aufgabe 34 : Optisches Theorem

S- und T-Matrixelemente stehen definitionsgemäß wie folgt in Beziehung:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)T_{fi}\,.$$

Die Unitarität der S-Matrix ist durch die Beziehung

$$\delta_{ij} = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_f S^\star_{fi}S_{fj}$$

ausgedrückt. Leiten Sie für einen Zwei-Teilchen-Anfangszustand, d.h. $i = (a_1(p_1), a_2(p_2))$ aus der Unitarität der S-Matrix folgende Beziehung zwischen T-Matrixelement und totalem Wirkungsquerschnitt her:

$$\mathrm{Im}(T_{ii}) = \frac{2\sqrt{(p_1\cdot_2)^2 - m_1^2m_2^2}}{(2\pi)^6}\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_f d\sigma_{fi} = \frac{2\sqrt{(p_1\cdot_2)^2 - m_1^2m_2^2}}{(2\pi)^6}\,\sigma_{tot}(i \to \text{irgendwas})\,.$$

Aufgabe 35 : Eigenschaften der Spektralfunktion $\rho(q)$

Für eine Lorentz-invariante Theorie eines skalaren Feldes $\phi(x)$ mit Wechselwirkung sei $\{|\alpha\rangle\}$ eine Menge von Impulseigenzuständen ($P|\alpha\rangle = p_\alpha|\alpha\rangle$), die ein vollständiges System von Zuständen bilden:

$$\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbf{1}\,.$$

Das Spektrum der Theorie erfülle die Bedingungen $p_\alpha^0 \geq 0$ und $(p_\alpha)^2 \geq 0$ für alle α.
Zeigen Sie, daß die Spektralfunktion,

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{\alpha} \delta^4(q - p_\alpha)|\langle 0|\phi(0)|\alpha\rangle|\,,$$

folgende Eigenschaften hat:

(a) Lorentz-Invarianz: $\rho(\Lambda q) = \rho(q)$. (Daraus folgt, daß $\rho(q)$ die Form $\rho(q^2)$ haben muß.),

(b) $\rho(q^2) = \rho(q^2)\theta(q^0)\theta(q^2)$.