

Relativistische Quantenfeldtheorie

Skript zur Vorlesung

von Dr. Oliver Brein

21. Februar 2008

Vorbemerkungen

Dieses Skript entsteht basierend auf der Vorlesung, die ich im Wintersemester 2007/2008 in Freiburg als Vertretung von Prof. Jochum J. van der Bij gehalten habe.

Ich danke Prof. Jochum J. van der Bij und Prof. Karl Jakobs und den beteiligten administrativen Organen des Physikalischen Instituts und des Rektorats der Universität Freiburg dafür, diese Professurvertretung, trotz des engen zeitlichen Rahmens, möglich gemacht zu haben. Weiterhin danke ich Prof. Nigel Glover und meiner „Entsendungsuniversität“ in Durham (UK) für die unbürokratische und schnelle Genehmigung der Beurlaubung. Prof. van der Bij möchte ich auch für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe für die Dauer meines Aufenthalts danken. Für das LaTeXen von Teilen meiner Vorlesungsnotizen möchte ich mich ganz besonders bei Oliver Fischer und Tobias Schmid bedanken. Der größte Dank geht an die Studenten meiner Vorlesung, die durch Ihre stete Aufmerksamkeit viel zum Erfolg der Veranstaltung beigetragen haben.

Oliver Brein
Freiburg i. Br., 21. Februar 2008

Literatur

Bücher

- P. Ramond, *Field Theory - A Modern Primer*
- T. Kugo, *Eichfeldtheorie*
- M. Peskin, Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*
- L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*
- J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*
- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I*
- C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*
- F. Mandl, *Introduction to Quantum Field Theory*
- W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*

WWW

- W. Hollik, unautorisierte Skripten zu den Vorlesungen *Relativistische Quantenfeldtheorie I & II* an der Universität Karlsruhe (TH),
<http://www.planetjahn.de/skripte/qft.php>
- M. Beneke, Skript zur Vorlesung *Quantenfeldtheorie I* an der RWTH Aachen,
http://www.physik.rwth-aachen.de/~mbeneke/qft107/qft1_master.pdf
- P. J. Mulders, Skript zur Vorlesung *Quantum Field Theory* an der VU Universität Amsterdam , <http://www.nat.vu.nl/~mulders/QFT-OE.pdf>
- G. 't Hooft, *The Conceptual Basis of Quantum Field Theory*,
<http://www.phys.uu.nl/~thooft/lectures/basisqft.pdf>

Inhaltsverzeichnis

0	Motivation	7
1	Teilchen	9
1.1	Poincaré-Transformationen	9
1.2	Teilchenzustände	15
2	Klassische Felder	21
2.1	Lagrange-Formalismus	21
2.2	Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen	25
2.2.1	Noether-Theorem	25
2.2.2	Klassifizierung von Symmetrien	28
2.3	Freie Felder	29
2.3.1	Skalarfelder	29
2.3.2	Vektorfelder	32
2.3.3	Dirac-Felder	36
2.4	Wechselwirkende Felder	41
2.4.1	Greensche Funktionen gängiger Feldgleichungen	42
2.4.2	Störungstheorie (Beispiel)	49
3	Quantisierte freie Felder	51
3.1	Skalarfelder	52
3.1.1	Reelles Skalarfeld	52
3.1.2	Komplexes Skalarfeld	52
3.2	Dirac-Felder	52
3.3	Vektorfelder	52
3.3.1	Masseloses Vektorfeld	52
3.3.2	Massives Vektorfeld	52
3.4	Propagatoren	52
4	Wechselwirkende Quantenfelder	53
4.1	Beispiele für Wechselwirkungen	53
4.2	S -Matrix, Wirkungsquerschnitte und Zerfallsbreiten	53
4.2.1	S - und T -Matrix	53

4.2.2	Wirkungsquerschnitt	53
4.2.3	Zerfallsbreite/Lebensdauer eines Teilchens	53
4.2.4	Optisches Theorem	53
4.3	Asymptotische Felder	53
4.3.1	Asymptotenbedingung	53
4.3.2	Källén-Lehmann-Darstellung des Propagators	53
4.3.3	Das LSZ-Theorem (Die Reduktionsformel)	53
4.4	Störungstheorie und Feynman-Diagramme	53
4.4.1	Störungstheorie für τ -Funktionen	53
4.4.2	Wick-Theorem	53
4.4.3	Beispiel ϕ^3 -Theorie	53
5	Quantenelektrodynamik	55
5.1	Lagrangedichte und Feynman-Regeln	55
5.2	QED-Prozesse in niedrigster Ordnung	55
5.3	QED in Ein-Schleifen-Ordnung	55
5.3.1	Struktur von Ein-Schleifen-Amplituden (Beispiel)	55
5.3.2	Elektron-Selbstenergie	55

Kapitel 0

Motivation

Ausgangspunkt der Quantenfeldtheorie sind die beiden gesicherten experimentellen Fakten:

- Relativität: Naturgesetze haben in jedem Inertialsystem die gleiche Form (relativistische Kovarianz der Naturgesetze).
- Quantenverhalten (z.B. $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$).

Historisch ist der Versuch, das Relativitätsprinzip mit der Quantenmechanik im Rahmen einer Beschreibung einer festen Anzahl von Teilchen zu vereinigen, gescheitert. Da andererseits das Relativitätsprinzip als fundamental angesehen wird, läßt sich folgende These aufstellen.

Es gibt keine Ein-Teilchen-Quantenmechanik.

Für den nicht-relativistischen Grenzfall liefert natürlich die gängige Quantenmechanik die Beschreibung einer festen Anzahl von Teilchen.

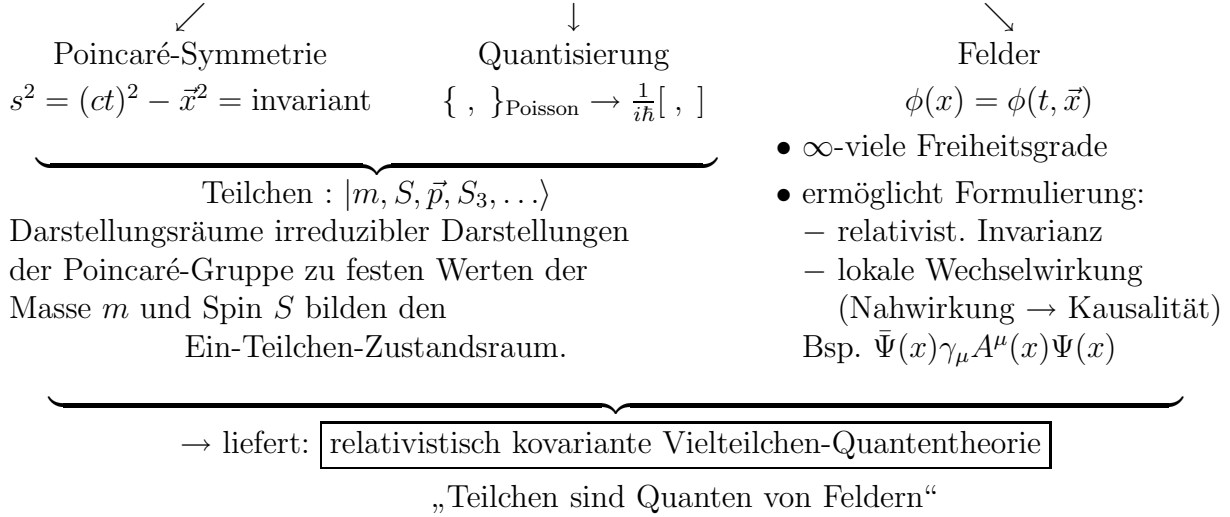
Die Hauptprobleme beim Versuch eine relativistische Ein-Teilchen-Quantenmechanik zu formulieren waren insbesondere die folgenden.

- Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation versagt, d.h. es treten indefinite Wahrscheinlichkeitsdichten auf.
- Teilchenerzeugung und -vernichtung wird nicht beschrieben (aber beobachtet).

Selbst schon die Abstrahlung bzw. Absorption von Licht beim Übergang von Elektronen zwischen Energieniveaus im Atom, eines der Grundprobleme der Atomphysik, benötigt eine Beschreibung der Erzeugung bzw. Vernichtung von Photonen. Die korrekte Beschreibung solcher Phänomene gelang durch die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes.

Im Unterschied zur gescheiterten relativistischen Ein-Teilchen-Quantenmechanik hat sich die Quantisierung von relativistisch kovarianten Feldgrößen als tragfähiges allgemeines Konzept erwiesen:

Relativistische Quantenfeldtheorie



Im weiteren werden wir natürliche Einheiten verwenden, d.h. wir setzen

$$c = 1, \quad \hbar = 1. \quad (1)$$

Damit haben z.B. Impuls und Energie oder die Koordinaten von Raum und Zeit jeweils die gleiche Einheit, nämlich

$$[\vec{p}] = [E] = [\text{Energie}], \quad [\vec{x}] = [t] = \frac{1}{\text{Energie}}, \quad (2)$$

und die Wirkung S ist dimensionslos $[S] = [t][E] = 1$.

Kapitel 1

Teilchen

1.1 Poincaré-Transformationen

Die Menge aller Transformationen der Raum- und Zeitkoordinaten, die das „Wegelement“ ds^2 in der vierdimensionalen Raumzeit,

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2, \quad (1.1)$$

unerändert lassen, nennt man Poincaré-Transformationen. Dazu gehören die folgenden Transformationen:

- 4 Translationen (3 räumliche, eine zeitliche): $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$,
- 6 eigentliche Lorentz-Transformationen (3 Drehungen, 3 Boosts):
$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$
- Spiegelung ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$), Zeitumkehr ($t \rightarrow -t$).

Jede Poincaré-Transformation kann durch Hintereinander-Ausführung der obigen Transformationen dargestellt werden. Mathematisch gesehen bilden die Poincaré-Transformationen zusammen eine Gruppe, die Poincaré-Gruppe. Die eigentlichen Lorentz-Transformationen in Kombination mit Spiegelung und Zeitumkehr bilden die Lorentz-Transformationen. Die Translationen und eigentlichen Lorentz-Transformationen zusammen bilden eine Lie-Gruppe mit 10 kontinuierlichen Parametern.

Zunächst einige Notationen und Definitionen.

– Ein Vierer-Vektor: $x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$: (kontravariante Komponenten von x).

– Metrischer Tensor $g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: (g^{\mu\nu}). \text{ Damit ist } (g^{-1}g)^\mu{}_\nu = \sum_{\rho=0}^3 g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu.$$

– (Einsteinsche) Summenkonvention: Über doppelt auftretende Indizes in Produkten ist zu summieren, und zwar für:

$$\text{griechische Indizes } (\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots) : \sum_{\mu=0}^3, \sum_{\nu=0}^3, \dots$$

$$\text{lateinische Indizes } (l, k, i, m, \dots) : \sum_{l=1}^3, \sum_{k=1}^3, \dots$$

– Definition kovariante Indizes: $x_\mu := g_{\mu\nu}x^\nu$, $(x_\mu) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (t, -\vec{x})$. Beachte: mit \vec{x} ist immer (x^1, x^2, x^3) gemeint.

– Der Wechsel von ko- zu kontravarianten Indizes für beliebige Lorentztensoren ist immer über die „Kontraktion“ des entsprechenden Index mit der Metrik definiert.

Zum Beispiel: $T^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho}T_{\rho\nu}$ oder $T_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho}g^{\nu\sigma}T^\rho{}_\sigma$. Insbesondere gilt $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$.

– Ableitung: $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ und $\partial^m u := \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu}\partial_\nu$. Die Indexpositionen sind konsistent, denn damit wird z.B. $\partial_\mu x^\mu = \partial^\mu x_\mu = 4$ invariant.

– Das Skalarprodukt

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu, \quad (1.2)$$

ist invariant unter Lorentz-Transformationen.

Daraus kann man eine Eigenschaft der Lorentz-Transformationsmatrizen ablesen: $x \cdot y \xrightarrow{\Lambda} x' \cdot y' = g_{\mu\nu}x'^\mu y'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho y^\sigma$, also:

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma. \quad (1.3)$$

Multiplikation der Gleichung mit der Inversen Matrix $(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\tau$ liefert:

$$(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\tau = \Lambda_\tau{}^\sigma. \quad (1.4)$$

Hieraus folgt

$$\det \Lambda^{-1} = \det \Lambda \quad \Rightarrow \quad (\det \Lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda \in \{+1, -1\}. \quad (1.5)$$

Lorentz-Transformationen mit $\det \Lambda = -1$ sind darstellbar als Hintereinanderausführung einer eigentlichen Lorentz-Transformation und einer Spiegelung oder Zeitumkehr.

– Aus Gleichung (1.5) folgt, daß das vierdimensionale Volumenelement d^4x ein Lorentz-invariantes Integral ist:

$$d^4x \xrightarrow{\Lambda} d^4x' = |\det \Lambda| d^4x = d^4x. \quad (1.6)$$

– Ebenso ist $\frac{d^3p}{2\sqrt{m^2+p^2}} = d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0)$ ein Lorentz-invariantes Integralmaß [siehe 1. Übungsblatt]. Ein solches Integral über den ganzen 3-dimensionalen Raum entspricht dem Integral über alle Energie-Impuls-Konfigurationen eines Teilchens mit Masse m .

– Neben dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ ist auch der total antisymmetrische Tensor invariant unter eigentlichen Lorentz-Transformationen, d.h. die Komponenten des Tensors ändern sich unter der Lorentz-Transformationen nicht. Bei Spiegelung oder Zeitumkehr wechselt $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ das Vorzeichen. Wir verwenden die Konvention:

$$e^{0123} = 1.$$

Damit wird zum Beispiel:

$$e^{0ijk} = -e^{ijk} \quad \text{mit} \quad e^{123} = 1$$

und

$$\epsilon_{0123} = g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\rho} g_{3\sigma} e^{\mu\nu\rho\sigma} = -e^{0123} = -1.$$

Die Determinante eines Rang-2-Tensors M^μ_ν kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$\det M = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M^\mu_\mu M^\nu_\nu M^\rho_\rho M^\sigma_\sigma$$

Poincaré-Gruppe

Die eigentlichen Lorentz-Transformationen zusammen mit den Translationen bilden eine Lie-Gruppe mit 10 kontinuierlichen Parametern. Gruppenelemente g sind differenzierbare Funktionen der Parameter:

$$g(\theta^k, \phi^l, a_\mu) = e^{-i\theta^k J^k - i\phi^l K^l + i a_\mu P^\mu}. \quad (1.7)$$

Dabei sind die Generatoren J^k, K^l und P^μ jeweils assoziiert mit Drehungen, Boosts und Translationen. Bei Kenntnis einer Darstellung der der Poincaré-Transformationen, lassen sich die Generatoren der Gruppe durch Betrachtung infinitesimaler Transformationen gewinnen:

$$g(\delta\theta^k, \delta\phi^l, \delta a_\mu) = \mathbf{1} - i\delta\theta^k J^k - i\delta\phi^l K^l + i\delta a_\mu P^\mu. \quad (1.8)$$

Damit kann man die Vertauschungsrelationen (Algebra) der Generatoren berechnen.

Lorentz-Gruppe

Für die Koordinatentransformationen gibt es folgende Darstellungen.

Drehungen:

– Drehung, mathematisch positiv, um z-Achse:

$$\Lambda(\theta^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^3 & -\sin \theta^3 & 0 \\ 0 & \sin \theta^3 & \cos \theta^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

– Drehung, mathematisch positiv, um x-Achse:

$$\Lambda(\theta^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta^1 & -\sin \theta^1 \\ 0 & 0 & \sin \theta^1 & \cos \theta^1 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

– Drehung, mathematisch positiv, um y-Achse:

$$\Lambda(\theta^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^2 & 0 & \sin \theta^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta^2 & 0 & \cos \theta^2 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Boosts:

– Boost, in 1-Richtung:

$$\Lambda(\phi^1) = \begin{pmatrix} \cosh \phi^1 & \sinh \phi^1 & 0 & 0 \\ \sinh \phi^1 & \cosh \phi^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

– Boost, in 2-Richtung:

$$\Lambda(\phi^2) = \begin{pmatrix} \cosh \phi^2 & 0 & \sinh \phi^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \phi^2 & 0 & \cosh \phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

– Boost, in 3-Richtung:

$$\Lambda(\phi^3) = \begin{pmatrix} \cosh \phi^3 & 0 & 0 & \sinh \phi^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \phi^3 & 0 & 0 & \cosh \phi^3 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Dabei hängt für einen Boost in l -Richtung die Rapidität ϕ^l mit der Geschwindigkeit v^l des Transformierten Systems wie folgt zusammen:

$$v^l = \tanh \phi^l. \quad (1.15)$$

Dabei ist

$$\sinh \phi = \frac{\tanh \phi}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}}, \quad \cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}}.$$

Generatoren:

Die Darstellungen der Generatoren der jeweiligen Transformation lassen sich leicht durch Betrachtung jeweils eines infinitesimalen Transformationsparameters in den Gleichungen (1.9) bis (1.14) und Vergleich mit Gleichung (1.8) ermitteln.

Man erhält so für die Drehgeneratoren die Darstellung

$$J^1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

und für die Boostgeneratoren

$$K^1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Beachte, daß die J^k durch hermitesche Matrizen dargestellt sind, während die K^l nicht durch hermitesche Matrizen dargestellt sind.

Mit diesen Darstellungen für kann man die Algebra der Lorentz-Gruppe berechnen:

$$\begin{aligned} [J^l, J^k] &= i\epsilon^{lkn} J^n, \\ [K^l, K^k] &= -i\epsilon^{lkn} J^n, \\ [J^l, K^k] &= i\epsilon^{lkn} K^n, \\ [J^l, K^l] &= 0 \quad (l = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Im Allgemeinen faßt man die Algebra (1.18) als abstrakte Algebra auf, für die man neben der zur Herleitung benutzten „fundamentalen Darstellung“, als Matrizen die im Minkowski-Raum wirken, auch andere Darstellungen finden kann. Zum Beispiel gibt es folgende Darstellung der J^k und K^l durch Differentialoperatoren, die auf Funktionen im Minkowski-Raum wirken [siehe 1. Übungsblatt]:

$$\begin{aligned} J_1 &\doteq -i(x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}), & J_2 &\doteq -i(x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}), & J_3 &\doteq -i(x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}), \\ K_1 &\doteq -i(x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^0}), & K_2 &\doteq -i(x^0 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^0}), & K_3 &\doteq -i(x^0 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^0}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Die Generatoren J^k und K^l lassen sich als die Komponenten eines antisymmetrischen Lorentz-Tensors $J_{\mu\nu}(= -J_{\nu\mu})$ auffassen, mit

$$(J_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -K^1 & -K^2 & -K^3 \\ K^1 & 0 & J^3 & -J^2 \\ K^2 & -J^3 & 0 & J^1 \\ K^3 & J^2 & -J^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Eine allgemeine Lorentz-Transformation kann dann auch in der Form

$$g(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}} \quad (1.21)$$

mit

$$(\omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\phi^1 & -\phi^2 & -\phi^3 \\ \phi^1 & 0 & \theta^3 & -\theta^2 \\ \phi^2 & -\theta^3 & 0 & \theta^1 \\ \phi^3 & \theta^2 & -\theta^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

geschrieben werden. Damit erhält man aus Gleichung (1.18) die kompakte kovariante Form der Lorentz-Algebra:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma}). \quad (1.23)$$

In der Feldtheorie betrachten wir Funktionen im Minkowski-Raum, die möglicherweise noch bezüglich einer Matrix-Darstellung der Lorentzgruppe transformieren können. Für diesen allgemeineren Fall sind die Darstellungen der Generatoren der Lorentz-Gruppe zusammengesetzt:

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \quad (1.24)$$

mit $L_{\mu\nu}$ der Differentialoperatordarstellung aus Gleichung (1.19) und $S_{\mu\nu}$ einer Matrix-Darstellung der Lorentz-Gruppe. Selbstverständlich vertauschen $L_{\mu\nu}$ und $S_{\mu\nu}$ wechselseitig.

Gruppe der Translationen

Der Generator der Translationen ist der Viererimpuls P_μ dargestellt durch $i\partial_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Damit erhält man die zusätzlichen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [P_\mu, J_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Gleichungen (1.23) und (1.25) bilden zusammen die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe, die wir nun als Algebra für abstrakte Objekte $J_{\mu\nu}$ und P^μ auffassen wollen (hier salopp Operatoren genannt), für die es konkrete Matrix-Darstellungen zu finden gilt.

Dazu betrachten wir invarianten Operatoren, d.h. Operatoren, die mit allen Generatoren vertauschen und deshalb invariant unter Gruppentransformationen sind. Solche Operatoren werden in der Gruppentheorie auch Casimir-Operatoren genannt und sind Polynome in den Generatoren. Für die Poincaré-Gruppe gibt es zwei linear unabhängige Casimir-Operatoren:

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu, \\ W^2 &= W_\mu W^\mu \quad \text{mit} \quad W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma \end{aligned}$$

für die also gilt:

$$[P^2, P_\mu] = [P^2, J_{\mu\nu}] = [W^2, P_\mu] = [W^2, J_{\mu\nu}] = 0.$$

Die Größe W^μ wird Pauli-Lubanski-Operator genannt. Die physikalische Bedeutung ist salopp formuliert

$$\begin{aligned} P^2 &\sim (\text{Masse})^2, \\ W^2 &\sim (\text{Masse})^2 \times (\text{Drehimpuls})^2. \end{aligned}$$

1.2 Teilchenzustände

Zum besseren Verständnis der folgenden Formulierungen zunächst hier ein mathematischer Einschub.

Einschub: Gruppentheoretische Begriffe

- **Darstellung einer Gruppe $G = \{g\}$:**

Eine Darstellung einer Gruppe G mit Elementen g ist eine Abbildung

$$\begin{cases} G \rightarrow D(G) \\ g \mapsto D(g) : \text{Operator auf einem Vektorraum } V \end{cases}$$

welche die Gruppenstruktur erhält, d.h. mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2 &\mapsto D(g_1)D(g_2), \\ \mathbf{I} &\mapsto \mathbf{1}, \\ g^{-1} &\mapsto D(g)^{-1}, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{I} das Einselement der Gruppe G ist und $\mathbf{1}$ der Einheitsoperator im Vektorraum V . $D(G)$ ist eine Gruppe mit gleicher algebraischer Struktur wie G . Eine Abbildung auf lineare Operatoren auf V heißt „lineare Darstellung“ und eine Abbildung die die volle algebraische Struktur der Gruppe erhält heißt „treue Darstellung“. Den Vektorraum V bezeichnet man auch als Darstellungsraum.

- **Invarianter Unterraum der Darstellung D :**

Ein invarianter Unterraum einer Darstellung D ist ein Unterraum U_{inv} von V , für den gilt, daß die Operatoren $D(g)$ für alle g jeden Vektor aus U_{inv} wieder auf U_{inv} abbilden.

- **Irreduzible Darstellung:**

Eine Darstellung einer Gruppe in der es keinen invarianten Unterraum gibt. Im Darstellungsraum einer irreduziblen Darstellung kann jeder Vektor des Darstellungsraums aus einem fest gewählten Referenzvektor durch Gruppenoperationen generiert werden.

- **Casimir-Operatoren einer Lie-Gruppe:**

Es gibt eine maximale Menge von linear unabhängigen Polynomen in den Generatoren T_a einer Gruppe, $C_i(T_1, \dots, T_N)$, die mit allen T_a kommutieren:

$$[C_i, T_a] = 0, \quad a = 1, \dots, N.$$

Daraus folgt, daß $[C_i, e^{-i\alpha_a T_a}] = 0$ ist, d.h. die C_i kommutieren mit allen Gruppenelementen sind also „invariante Operatoren“.

Die Anzahl der linear unabhängigen C_i ist gleich der maximalen Anzahl kommutierender Generatoren. Diese Zahl nennt man auch „Rang der Lie-Gruppe“.

- **Schursches Lemma :**

Ein Operator, der mit allen Gruppenoperationen vertauscht ist in einer irreduziblen Darstellung proportional zum Einsoperator $\mathbf{1}$, d.h. wenn λ_i die Eigenwerte der Casimiroperatoren sind, dann gilt $C_i = \lambda_i \mathbf{1}$ in einer irreduziblen Darstellung.

- **Charakterisierung der irreduziblen Darstellungen:**

Eine irreduzible Darstellung ist charakterisiert durch Angabe der Eigenwerte aller Casimir-Operatoren.

Beispiel: Die Drehgruppe hat Rang 1, und \vec{J}^2 ist Casimir-Operator mit Eigenwerten $j(j+1)$ und $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$.

Freies Teilchen

Für den quantenmechanischen Zustand eines freien Teilchens ist ein simultaner Eigenzustand von P^0 und \vec{P} wählbar:

$$|p, \lambda\rangle \in \text{Hilbert-Raum } \mathcal{H},$$

dabei bezeichnet λ weitere diskrete Quantenzahlen des Zustandes, wie z. B. die Spin-Polarisation oder die Ladung. Für den Moment schreiben wir kurz $|p\rangle = |p, \lambda\rangle$. Es gilt also

$$P^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle. \quad (1.26)$$

Poincaré-Transformationen

$$p \xrightarrow{\Lambda, a} p' = \Lambda p \quad (p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu)$$

in \mathcal{H} sind dargestellt durch unitäre Operatoren $U(\Lambda, a)$:

$$|p\rangle \xrightarrow{\Lambda, a} |p'\rangle = U(\Lambda, a)|p\rangle = |\Lambda p\rangle.$$

Bei Kenntnis von U führt die Betrachtung infinitesimaler Transformationsparameter auf die Darstellung der Generatoren $J_{\mu\nu}$ und P_μ als Operatoren auf \mathcal{H} :

$$U(\delta\omega^{\mu\nu}, \delta a^\mu) = \mathbf{1} - i \frac{\delta\omega^{\mu\nu}}{2} J_{\mu\nu} + i \delta a^\mu P_\mu. \quad (1.27)$$

Umgekehrt erlaubt die Kenntnis von $J_{\mu\nu}$ und P_μ und deren Wirken in infinitesimalen Transformationen (1.27) die Konstruktion einer Poincaré-Transformation mit endlichen Parametern durch Hintereinanderausführung von im Limes infinitesimalen Transformationen:

$$U(\Lambda, a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} + i \frac{1}{N} \left(-\frac{\omega^{\mu\nu}}{2} J_{\mu\nu} + a^\mu P_\mu \right) \right)^N = e^{-i \frac{\delta\omega^{\mu\nu}}{2} J_{\mu\nu} + i a^\mu P_\mu}.$$

Eigenwerte der invarianten Operatoren

- $P^2 = P^\mu P_\mu$:

Mit der Eigenwertgleichung für einen Viererimpuls-Eigenzustand (1.26) erhält man:

$$P^\mu P_\mu |p\rangle = p^\mu p_\mu |p\rangle = p^2 |p\rangle = ((p^0)^2 - \vec{p}^2) |p\rangle = m^2 |p\rangle. \quad (1.28)$$

$$\text{Eigenwerte von } P^2 : m^2 \in \mathbf{R}_0^+.$$

Falls m^2 ungleich Null ist, erlaubt ein Übergang ins Ruhesystem des Teilchens ($p \mapsto p'$ mit $p'^0 = m$ und $\vec{p}' = \vec{0}$) die Bestimmung des invarianten Skalarprodukts $p^2 (= p'^2)$ zu m^2 . Dieses hier trivial anmutende Vorgehen ist bei Anwendung auf W^2 sehr hilfreich zur Findung der Eigenwerte. Der Fall $m = 0$ ist übrigens konsistent mit Formel (1.28).

Betrachten wir nun einen mit beliebigem Λ und a transformierten Ein-Teilchen-Zustand im Hilbertraum: $|\Lambda p\rangle$. Die Poincaré-Invarianz des Eigenwertes eines Ein-Teilchen-Zustands ergibt sich aus der Eigenwertgleichung (1.26):

$$P^\mu P_\mu |\Lambda p\rangle = (\Lambda p)_\mu (\Lambda p)^\mu |\Lambda p\rangle = p^2 |\Lambda p\rangle = m^2 |\Lambda p\rangle.$$

- $W^2 = W^\mu W_\mu$ mit $W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma$:

Fall $m \neq 0$:

Wenn W^2 auf ein massives Teilchen wirkt, kann die Wirkung der Operatoren W^μ auf einen Ein-Teilchen-Zustand im Ruhesystem ausgewertet werden. Insbesondere wird dann

$$(P_\sigma) \rightarrow (m, \vec{0}),$$

$$W^\mu \rightarrow \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} m = \begin{cases} W^0 & = 0 \\ W^i & = \frac{1}{2} m \underbrace{\epsilon^{ijk0}}_{-\epsilon_{ijk}} J_{jk} = -m J^i \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}.$$

Damit erhält man also

$$W^2 |p'\rangle = -\vec{W}^2 |p'\rangle = -m^2 \vec{J}^2 |p'\rangle. \quad (1.29)$$

$$\text{Eigenwerte von } W^2 : -m^2 j(j+1) \text{ mit } j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\} \quad (1.30)$$

Übrigens sind die W^i die Generatoren der Gruppe aller Transformationen (alle Drehungen) unter denen der gewählte Vierervektor $(P_\sigma) = (m, \vec{0})$ unverändert bleibt, die sogenannte

„kleine Gruppe“ dieses Vierervektors. Der ungewöhnliche Normierungsfaktor $-m$ spielt dabei keine Rolle.

Zu festem m und j ist der vollständige Ein-Teilchen-Zustandsraum im massiven Fall aufgespannt durch alle Zustandsvektoren $|p, m_j\rangle$ mit $p^2 = m^2$ und m_j der Index im $(2j+1)$ -dimensionalen Darstellungsraum der Drehgruppe zur Quantenzahl j . Für einen gegebenen Zustand $|p, m_j\rangle$ können für m_j die Eigenwerte σ_j des Helizitätsoperators $(\vec{J} \cdot \vec{p})/|\vec{p}|$ gewählt werden. Dabei ist \vec{p} ein vorgegebener Dreiervektor, kein Operator.

Fall $m = 0$:

In diesem Fall gibt es kein Ruhesystem für den Ein-Teilchen-Zustand. Es ist immer eine Achse durch die Impulsrichtung $\vec{p}/|\vec{p}|$ ausgezeichnet, d.h. die volle Drehsymmetrie ist gebrochen. Das System bleibt jedoch unter der einparametrischen Symmetriegruppe der Drehungen um die ausgezeichnete Achse invariant. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann in ein System mit $(p^\mu) = (p, 0, 0, p)$ übergegangen werden. Der Pauli-Lubanski-Operator kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$W^0 = -W^3 = pJ^3, \quad W^1 = -p(J^1 - K^2), \quad W^2 = -p(J^2 + K^1).$$

Dabei sind die W^μ wieder die Generatoren der kleinen Gruppe des gewählten Vierervektors: W^0 bzw. W^3 erzeugt Drehungen um die \vec{p} -Achse (hier z -Achse), während W^1 und W^2 Translationen in der x - y -Ebene erzeugen. Die Algebra dieser Operatoren ist

$$[W^0, W^1] = ipW^2, \quad [W^0, W^2] = -ipW^1, \quad [W^1, W^2] = 0.$$

Offenbar bilden die Drehungen um die \vec{p} -Achse eine Untergruppe der kleinen Gruppe von $(p^\mu) = (p, 0, 0, p)$.

Das invariante Quadrat des Pauli-Lubanski-Operators hat die Form:

$$W_\mu W^\mu = -(W^1)^2 - (W^2)^2 = -p^2(J^1 - K^2)^2 - p^2(J^2 + K^1)^2.$$

Weitere kontinuierliche Symmetrien, außer der Drehsymmetrie um die Achse der Bewegungsrichtung, wurden aber bisher in der Natur nicht beobachtet, weshalb wir im Weiteren davon ausgehen werden, daß physikalisch relevante Zustände nur trivial bezüglich der durch W^1 und W^2 erzeugten Transformationen transformieren. Damit ist der Eigenwert von $W_\mu W^\mu$ für einen masselosen Ein-Teilchen-Zustand gleich Null:

$$W_\mu W^\mu \doteq 0.$$

(HIER FEHLT NOCH WAS)

Definition eines Teilchens

Mit diesen Vorbetrachtungen läßt sich nun abstrakt definieren, was wir unter einem Teilchen verstehen.

Ein Teilchen ist ein Zustand

$$|m, s, \lambda\rangle$$

im Unterraum einer irreduziblen Darstellung der Poincaré-Gruppe. Die irreduzible Darstellung ist charakterisiert durch die Eigenwerte von P^2 und \vec{J}^2 falls $m \neq 0$ (bzw. $(\vec{J} \cdot \vec{p})/|\vec{p}|$ falls $m = 0$):

$$m^2 \in \mathbf{R}_0^+ \quad \text{und} \quad s(s+1) \quad (\text{bzw. } \sigma \in \{\pm s\}) \quad \text{mit} \quad s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}.$$

Dabei parametrisiert λ weitere diskrete Quantenzahlen (z.B. Spin-Polarisation, Ladung, Parität, etc.).

(HIER FEHLT NOCH WAS)

Kapitel 2

Klassische Felder

2.1 Lagrange-Formalismus

Die fundamentale Größe der klassischen Physik ist die Wirkung S ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L \quad (2.1)$$

mit einer Lagrange-Funktion L , die von den dynamischen Variablen des physikalischen Systems abhängt. Die Bewegungsgleichungen für die dynamische Variablen (Naturgesetze) folgen aus einem Variationsprinzip:

Prinzip der stationären Wirkung (oder Hamilton-Prinzip):

Das Zeitverhalten der dynamischen Variablen bei Vorgabe ihrer Werte am Anfang t_1 und Ende t_2 eines Zeitintervalls ist derart, daß die Wirkung S stationär ist bezüglich der Variation der dynamischen Variablen:

$$\delta S = 0. \quad (2.2)$$

Punktmechanik

In der Punktmechanik ist die Lagrange-Funktion eine Funktion der Koordinaten q_k von Massenpunkten und deren zeitlichen Änderungen \dot{q}_k (verallgemeinerte Geschwindigkeiten),

$$L = L(q, \dot{q}) \quad \text{mit} \quad q = (q_1, \dots, q_n), \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \quad (2.3)$$

und die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (2.4)$$

ist ein Funktional $S[q]$ der Bahnbewegung der Punktmassen.

Um das Prinzip der stationären Wirkung zur Herleitung der Bewegungsgleichungen anwenden zu können, betrachten wir infinitesimale Variationen der dynamischen Variablen:

$$q_k \rightarrow q_k + \delta q_k, \quad (2.5)$$

die am Anfang und Ende des Zeitintervalls verschwinden:

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0. \quad (2.6)$$

Die Variation der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\delta \dot{q}_k$ ist durch die Zeitableitung der Variationen δq_k gegeben:

$$\dot{q}_k \rightarrow \dot{q}_k + \delta \dot{q}_k = \dot{q}_k + \frac{d}{dt} \delta q_k. \quad (2.7)$$

Für die Variation der Wirkung gilt dann:

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.8)$$

Mit der Definition der Wirkung (2.4) erhält man daraus

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{t_1}^{t_2}.$$

Der an den Intervallenden t_1 und t_2 ausgewertete „Randterm“, den man durch partielle Integration erhält, verschwindet, weil die variierten Größen dort festgehalten werden (Gl. (2.6)). Damit erhält man die bekannten Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0. \quad (2.9)$$

Übergang zur Hamilton-Funktion H

Die zu den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_k kanonisch konjugierten Impulse sind definiert durch:

$$p_k := \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k}. \quad (2.10)$$

Die Hamilton-Funktion H ist die Legendre-Transformierte der Lagrangedichte, die man bei Übergang von den $\{q_k, \dot{q}_k\}$ zu den $\{q_k, p_k\}$ als unabhängige Variablen zur Beschreibung des Systems erhält:

$$H(q_k, p_k) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}). \quad (2.11)$$

Dabei sei \dot{q}_k mit Hilfe von Gl. (2.10) als Funktion $\dot{q}_k(q_k, p_k)$ ausgedrückt.

Feldtheorie

Der Übergang von der Mechanik diskreter Punktmassen zur Kontinuumsmechanik kann man sich als Grenzübergang eines Systems mit N Punktmassen auf einem räumlichen Gitter mit Gitterabstand a im gleichzeitigen Limes $N \rightarrow \infty$ und $a \rightarrow 0$, so daß die Gesamtenergie immer konstant bleibt, vorstellen. An jedem Gitterpunkt, spezifiziert durch die Angabe dreier ganzer Zahlen $\vec{m} := (m_1, m_2, m_3)$, kann ein Satz von n Punktmassen mit Koordinaten $q_{k,\vec{m}}(t)$ vorhanden sein. Die punktmechanischen Koordinaten $q_{k,\vec{m}}(t)$ gehen im Kontinuumsimes über in Felder $\phi_k(\vec{x}, t)$, wobei das diskrete Indextripel \vec{m} in die kontinuierliche Koordinate \vec{x} übergeht:

$$(q_{\vec{m}}(t), \dot{q}_{\vec{m}}(t)) \rightarrow (\phi(x), \partial_\mu \phi(x), \dots) \quad (2.12)$$

mit $q_{\vec{m}}(t) = (q_{1,\vec{m}}(t), \dots, q_{n,\vec{m}}(t))$, $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$, $\partial_\mu \phi = (\partial_\mu \phi_1, \dots, \partial_\mu \phi_n)$.

Die Zeitableitungen der Felder korrespondieren direkt zu den Zeitableitungen der punktmechanischen Koordinaten. Raumableitungen kommen durch Wechselwirkungspotentiale zwischen den punktmechanischen Koordinaten zustande, z.B. gilt für ein eindimensionales Problem der Übergang:

$$\frac{1}{a}(q_{k+1} - q_k) \rightarrow \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}$$

Je nach Form des Potentials können im Limes auch Raum- und Zeitableitungen höherer Ordnung auftreten.

Im Kontinuumsimes wird die Lagrangefunktion zu einem Raumintegral über eine Lagrangedichte \mathcal{L} :

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.13)$$

die Wirkung S ist dann:

$$S[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dt L(t) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.14)$$

Dabei gehen wir hier davon aus, daß das System im ganzen Minkowskiraum definiert ist. Da das Integralmaß d^4x Lorentz-invariant ist, folgt sofort, daß für eine Lorentz-invariante Lagrangedichte \mathcal{L} auch die hier definierte Wirkung S eine Lorentz-Invariante ist.

Hamilton-Prinzip und Feldgleichungen

Die Dynamik der Feldtheorie erhält man wieder aus dem Hamilton-Prinzip (2.2):

$$\delta S = S[\phi + \delta \phi] - S[\phi] \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.15)$$

Dazu betrachten wir infinitesimale Variationen der Felder

$$\phi_k(x) \rightarrow \phi_k(x) + \delta \phi_k(x), \quad (2.16)$$

$$\partial_\mu \phi_k(x) \rightarrow \partial_\mu \phi_k(x) + \partial_\mu (\delta \phi_k(x)), \quad (2.17)$$

welche die Randbedingung erfüllen, daß im räumlichen und zeitlichen Unendlichen verschwinden:, d.h.

$$\delta\phi_k(x) \rightarrow 0 \text{ für } \max_{\mu} |x^{\mu}| \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \delta S &= \int d^4x \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta\phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_k)} \partial_{\mu} (\delta\phi_k) \right) \\ &= \int d^4x \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_k)} \right) \delta\phi_k. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dabei haben wir den Term proportional zu $\partial_{\mu} \delta\phi_k$ partiell integriert und ausgenutzt, daß der auftretenden „Randterm“ hier aufgrund der Randbedingungen verschwindet.¹ Damit ergeben sich die Feldgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen) aus (2.19) zu

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_k)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} = 0. \quad (2.20)$$

Die kanonischen Feldimpulse sind in völliger Analogie zur Punktmechanik wie folgt definiert:

$$\Pi_k(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_k)}. \quad (2.21)$$

Dadurch lässt sich nun analog zur Lagrange-Dichte die Hamilton-Dichte definieren:

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{k=1}^n \Pi_k \frac{\partial \phi_k}{\partial t} - \mathcal{L}. \quad (2.22)$$

Die Hamilton-Funktion ist dann das Raumintegral der Hamilton-Dichte:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x) \quad (2.23)$$

Sowohl Hamilton-Dichte \mathcal{H} als auch Hamilton-Funktion sind natürlich nicht Lorentz-invariant.

¹Um dies einzusehen, schränken wir die Integration vorübergehend auf den Raumbereich einer 4-dimensionalen Kugel mit Radius R und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt, $K_R(0)$, ein und betrachten den Grenzwert $R \rightarrow \infty$ nach Ausführung der partiellen Integration. Der Rand der Kugel sei $\partial K_R(0)$. Es gilt dann für das Vektorfeld $f^{\mu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)}$:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R(0)} d^4x f^{\mu} \partial_{\mu} (\delta\phi_k) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{K_R(0)} d^4x \partial_{\mu} (f^{\mu} \delta\phi_k) - \int_{K_R(0)} d^4x (\partial_{\mu} f^{\mu}) \delta\phi_k \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial K_R(0)} d\sigma_{\mu} (f^{\mu} \delta\phi_k) - \int d^4x (\partial_{\mu} f^{\mu}) \delta\phi_k, \end{aligned}$$

Das Integral über den Rand der Kugel, welches man durch den Satz von Gauß (in 4 Dimensionen) erhält, verschwindet aufgrund der Randbedingung (2.18).

2.2 Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen

2.2.1 Noether-Theorem

Gegeben:

- Felder $\phi_k(x)$, $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k, x)$
- Koordinaten x^μ
- eine infinitesimale Transformation $T(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) \equiv T(\epsilon)$ mit den kontinuierlichen Parametern ϵ_A ($A = 1, \dots, N$):

$$T(\epsilon) : \begin{cases} x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, & \text{mit } \delta x^\mu = X_A^\mu(x) \epsilon_A \\ \phi_k(x) \mapsto \phi'_k(x') = \phi_k(x) + \delta \phi_k(x), & \text{mit } \delta \phi_k(x) = \Psi_{A,k}(x) \epsilon_A \end{cases} . \quad (2.24)$$

Satz

Ist die Wirkung S invariant² unter der N -parametrischen infinitesimalen Transformation $T(\epsilon)$, dann gibt es, zu jedem Parameter ϵ_A korrespondierend, N lokal erhaltene Größen, d.h. Vierer-Stromdichten j_A^μ (sog. „erhaltene Ströme“) die folgende Kontinuitätsgleichung erfüllen:

$$\partial_\mu j_A^\mu = 0. \quad (2.25)$$

Beweis

Der Beweis des Noether-Theorems verläuft wie folgt. Zunächst zeigen wir, daß die aus der Transformation $T(\epsilon)$ resultierende Variation der Wirkung $\delta S = S' - S$ für physikalische Feldkonfigurationen, d.h. für Felder welche die Euler-Lagrange-Gleichungen (2.20) erfüllen, immer die Form einer Vierer-Divergenz eines Vierer-Stromes annimmt. Unter der Voraussetzung, daß aufgrund einer Symmetrie eine vorgegebene Wirkung S invariant ist unter $T(\epsilon)$, folgt dann das Verschwinden dieser Vierer-Divergenz.

Die Variation der Wirkung ist:

$$\delta S = S' - S = \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'_k(x'), \partial'_\mu \phi'_k(x'), x') - \int d^4x \mathcal{L}(\phi_k(x), \partial_\mu \phi_k(x), x). \quad (2.26)$$

Zunächst betrachten wir die infinitesimale Änderung des Integralmaßes:

$$d^4x' = \left| \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right| d^4x,$$

²Diese Bedingung werden wir im Laufe des Beweises noch etwas präzisieren müssen.

mit der Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) = \delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu} \delta x^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu} X_A^{\mu}(x) \epsilon_A.$$

Unter Verwendung der Relationen

$$\det M = e^{\text{Sp}[\ln M]}, \quad \ln(1 + U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \dots,$$

für beliebige $(n \times n)$ -Matrizen M und U , erhalten wir:

$$\det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) = e^{\text{Sp}[\ln(\delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu} X_A^{\mu}(x) \epsilon_A)]} = 1 + \partial_{\mu} X_A^{\mu}(x) \epsilon_A.$$

Für infinitesimale ϵ_A ist diese Determinante auf jeden Fall positiv und wir erhalten:

$$d^4 x' = (1 + \partial_{\mu} \delta x^{\mu}) d^4 x = (1 + \partial_{\mu} X_A^{\mu}(x) \epsilon_A) d^4 x \quad (2.27)$$

Da von der Transformation $T(\epsilon)$ sowohl die Form der Felder $\phi_k(x)$ als auch deren Argument x betroffen sein kann, machen wir folgende Unterscheidungen für die Variation der Felder³:

$$\text{Formvariation : } \bar{\delta} \phi_k(x) = \phi'_k(x') - \phi_k(x'),$$

$$\text{Argumentvariation : } \Delta \phi_k(x) = \phi_k(x') - \phi_k(x),$$

$$\text{Gesamtvariation : } \delta \phi_k(x) = \phi'_k(x') - \phi_k(x) = \bar{\delta} \phi_k(x) + \Delta \phi_k(x).$$

Die Variation der Lagrange-Dichte mit $T(\epsilon)$ ist dann

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi'_k(x'), \partial'_{\mu} \phi'_k(x'), x') - \mathcal{L}(\phi_k(x), \partial_{\mu} \phi_k(x), x) \quad (2.28)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \bar{\delta} \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_k)} \bar{\delta} (\partial_{\mu} \phi_k) + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi_k(x), \partial_{\nu} \phi_k(x), x)}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu}. \quad (2.29)$$

Dabei ist im letzten Term die totale Ableitung nach der Koordinate x^{μ} gemeint⁴, welcher auch mit Hilfe der Argumentvariationen wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\frac{\mathcal{L}(\phi_k(x), \partial_{\nu} \phi_k(x), x)}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \Delta \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_k)} \Delta (\partial_{\mu} \phi_k) + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi_k, \partial_{\nu} \phi_k, x)}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu}. \quad (2.30)$$

³Beispiel: Sei $\phi(x) = e^{ikx}$ und die Transformation eine infinitesimale Lorentz-Transformation. Dann gilt: $x \xrightarrow{\Lambda} \Lambda x = (1 + \delta \Lambda)x$ und $k \xrightarrow{\Lambda} \Lambda k = (1 + \delta \Lambda)k$. Damit wird

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \phi(x) &= e^{i(\Lambda k) \cdot (\Lambda x)} - e^{ik \cdot (\Lambda x)} = e^{ikx} \cdot e^{i(\delta \Lambda k) \cdot x + ik \cdot (\delta \Lambda x)} - e^{ikx} e^{ik \cdot (\delta \Lambda x)} \\ &= e^{ikx} [(1 + i(\delta \Lambda k) \cdot x)(1 + ik \cdot (\delta \Lambda x)) - (1 + ik \cdot (\delta \Lambda x))] = e^{ikx} i(\delta \Lambda k) \cdot x, \\ \Delta \phi(x) &= e^{ik \Lambda x} - e^{ikx} = \dots = e^{ikx} ik \cdot (\delta \Lambda x), \\ \delta \phi(x) &= e^{i(\Lambda k) \cdot (\Lambda x)} - e^{ikx} = e^{ikx} (i(\delta \Lambda k) \cdot x + ik \cdot (\delta \Lambda x)). \end{aligned}$$

Offenbar ist $\delta \phi(x) = \bar{\delta} \phi(x) + \Delta \phi(x)$, was im vorliegenden Fall gleich Null ist, weil es sich hier um ein Skalarfeld handelt, welches invariant unter der Lorentz-Transformation ist.

⁴Wenn nichts anderes bemerkt wird, verstehen wir eine Ableitung ∂_{μ} immer als totale Ableitung nach der Koordinate x^{μ} .

In diesem Fall ist im letzten Term nur die Ableitung nach einer expliziten Koordinatenabhängigkeit der Lagrangedichte \mathcal{L} gemeint.

Mit den Gln. (2.27), (2.28) und (2.30) wird die Variation der Wirkung (2.26) zu:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x (\delta \mathcal{L} + (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L}) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \bar{\delta} \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \bar{\delta} (\partial_\mu \phi_k) + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu).\end{aligned}\quad (2.31)$$

Die Formvariationen von ϕ_k und $\partial_\mu \phi_k$ führen wir auf die Gesamtviation von ϕ_k zurück, die durch das Transformationsverhalten (2.24) gegeben ist:

$$\begin{aligned}\bar{\delta} \phi_k(x) &= \phi'_k(x') - \phi_k(x) = \phi_k(x) + \delta \phi_k(x) - (\phi_k(x) + (\partial_\mu \phi_k(x)) \delta x^\mu) \\ &= \delta \phi_k(x) - (\partial_\mu \phi_k(x)) \delta x^\mu, \\ \bar{\delta} (\partial_\mu \phi_k(x)) &= \partial'_\mu \phi'_k(x') - \partial_\mu \phi_k(x) = \partial'_\mu (\phi_k(x) + \delta \phi_k(x)) - \partial'_\mu (\phi_k(x) + (\partial_\nu \phi_k(x)) \delta x^\nu) \\ &= \partial_\mu (\bar{\delta} \phi_k(x)).\end{aligned}$$

Damit wird Gl. (2.31) zu:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} (\delta \phi_k - (\partial_\mu \phi_k(x)) \delta x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial_\mu (\delta \phi_k - (\partial_\nu \phi_k) \delta x^\nu) + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right].$$

Unter Verwendung der Feldgleichungen (2.20), können wir $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}$ durch $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)}$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\delta \phi_k - (\partial_\nu \phi_k) \delta x^\nu) + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} (\Psi_{k,A}(x) - X_A^\nu(x) \partial_\nu \phi_k) + \mathcal{L} X_A^\mu(x) \right) \right] \epsilon_A.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile wieder die Variationen der Felder und Koordinaten gemäß der Transformation (2.24) eingesetzt. Das Ergebnis gibt Anlaß zur Definition der Viererströme:

$$j_A^\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} (\Psi_{k,A}(x) - X_A^\nu(x) \partial_\nu \phi_k) + \mathcal{L} X_A^\mu(x), \quad A = 1, \dots, N.$$

Bisher haben wir gezeigt

$$d^4x' \mathcal{L}(\phi'_k, \partial'_\nu \phi'_k, x') - d^4x \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\nu \phi_k, x) = d^4x (\partial_\mu j_A^\mu) \epsilon_A.$$

Ist nun die Wirkung S invariant unter $T(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$, so folgt wegen der Unabhängigkeit der ϵ_A aus (2.32) zunächst nur:

$$\int d^4x \partial_\mu j_A^\mu = 0.$$

Gilt zusätzlich die stärkere Bedingung, daß das Produkt aus Integralmaß und Lagrange-dichte sich unter beliebigen infinitesimalen Transformationen $T(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ nur um höchstens einen Term proportional zu einer Vierer-Divergenz ändert,

$$d^4x' \mathcal{L}(\phi'_k, \partial'_\nu \phi'_k, x') - d^4x \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\nu \phi_k, x) = d^4x (\partial_\mu f_A^\mu) \epsilon_A,$$

dann hat dies die Invarianz der Wirkung S zur Folge und es gelten zusätzlich N lokale Kontinuitätsgleichungen ($A = 1, \dots, N$):

$$\partial_\mu \mathcal{J}_A^\mu(x) = 0 \quad (2.33)$$

mit

$$\mathcal{J}_A^\mu(x) = j_A^\mu(x) - f_A^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} (\Psi_{k,A}(x) - X_A^\nu(x) \partial_\nu \phi_k) + \mathcal{L} X_A^\mu(x) - f_A^\mu(x). \quad (2.34)$$

□

Erhaltene Ladungen

Aufgrund der Kontinuitätsgleichungen sind die mit den Strömen $\mathcal{J}_A^\mu(x)$ verknüpften Ladungen

$$Q_A = \int d^3x \mathcal{J}_A^0(x)$$

erhalten:

$$\frac{dQ_A}{dt} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R(O)} d^3x \partial_0 \mathcal{J}_A^0(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(O)} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{J}}_A(x) \stackrel{\text{Gauss}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial K_R(O)} d\vec{\sigma} \cdot \vec{j}(x) = 0.$$

Noether-Ströme nicht eindeutig

Die erhaltenen Ströme sind nicht eindeutig festgelegt. Wenn $\partial_\mu \mathcal{J}_A^\mu = 0$ gilt, dann gilt auch für die Größe $\tilde{\mathcal{J}}_A^\mu := \mathcal{J}_A^\mu + \partial_\nu \Theta^{\nu\mu}$ mit einem anti-symmetrischen Lorentz-Tensor $\Theta^{\mu\nu} = -\Theta^{\nu\mu}$ eine Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\mu \tilde{\mathcal{J}}_A^\mu = \partial_\mu \mathcal{J}_A^\mu + \partial_\mu \partial_\nu \Theta^{\nu\mu} = 0.$$

2.2.2 Klassifizierung von Symmetrien

In relativistischen Feldtheorien unterscheidet zwei Klassen von Symmetrien.

Äußere Symmetrien: Raum-Zeit Symmetrien

Invarianz unter Transformationen der Koordinaten und Felder gemäß der kontinuierlichen Poincare-Transformationen (Drehungen, Boosts und Translationen) und der diskreten Transformationen (Raumspiegelung und Zeitumkehr).

In Theorien ohne Massenskala gibt es noch die Skalenänderung als eine weitere Symmetrie-Transformation. Diese kann in einer Klassischen Theorie auftreten, ist aber in der korrespondierenden Quantenfeldtheorie verletzt (d.h. keine Symmetrie mehr).

Innere Symmetrien

Invarianz unter kontinuierlichen oder diskreten Transformationen *nur* der Felder am gleichen Raum-Zeit-Punkt.

Bemerkung:

Diskrete Symmetrien entziehen sich der Schlussfolgerung des Noethertheorems, d.h. führen nicht auf lokal erhaltene Größen. Dennoch erlaubt eine diskrete Symmetrie eines physikalischen Systems die Unterteilung der Energie-Eigenzustände in Zustände zu festen Eigenwerten der Symmetrie-Transformation \mathcal{S} . Ein Eigenzustand von \mathcal{S} bleibt Eigenzustand für alle Zeiten.

2.3 Freie Felder

Wir bezeichnen ein Feld $\phi(x)$ als freies Feld, wenn die Feldgleichungen, die es erfüllt, linear in ϕ sind, d.h. die Lagrangedichte ist (höchstens) quadratisch in $\phi, \partial_\mu \phi, [\partial_\nu \partial_\mu \phi], \dots$

2.3.1 Skalarfelder

Das Transformationsverhalten eines Skalarfeldes $\phi(x)$ unter Poincaré-Transformationen ist:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x). \quad (2.35)$$

Wir wollen hier die Poincaré-Transformationen immer als aktive Operationen auffassen. Demnach bewirkt eine Translation mit Parameter a^μ eine Verschiebung aller Raumzeit-Punkte x gemäß $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$ und aller Felder derart, daß die funktionale Gestalt des Feldes um den gleichen Verschiebungsvektor a^μ gegenüber der ursprünglichen Gestalt verschoben ist. Das bedeutet zum Beispiel, daß eine Feldkonfiguration $\phi(x)$ mit einem Peak bei $x = 0$ nach einer Verschiebung um a diesen Peak bei $x = a$ haben wird, wenn das Feld ϕ' in den ursprünglichen Koordinaten x , also als $\phi'(x)$ ausgedrückt wird. Ausgedrückt in den ursprünglichen Koordinaten x gilt also die Entsprechung:

$$\begin{aligned} \text{Lorentz-Transformation} & : x \rightarrow x' = \Lambda x & \leftrightarrow & \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x), \\ \text{Translation} & : x \rightarrow x' = x + a & \leftrightarrow & \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x - a). \end{aligned}$$

Reelles Skalarfeld

Für ein reelles Skalarfeld gilt:

$$\phi(x) = \phi^*(x).$$

Ein Feld, das diese Bedingung erfüllt, nennen wir auch „neutrales“ Skalarfeld, denn wir werden später sehen, daß es zur Einführung einer elektrischen Ladung die Existenz einer zusätzlichen inneren Symmetrietransformation der betrachteten Materiefelder bedarf, welche sich mit einem reellen Feld nicht realisieren läßt.

Die Lagrangedichte eines freien, reellen Skalarfeldes ist

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (2.36)$$

Daraus ergibt sich folgende Feldgleichung (Klein-Gordon-Gleichung)

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \square = \partial_\mu\partial^\mu. \quad (2.37)$$

Diese Gleichung ist Poincaré-invariant, was impliziert, daß mit jede Lösung $\phi(x)$ Poincaré-invariant sein muß. Sie läßt folgende Lösungen durch ebene Wellen zu:

$$\phi_{\vec{p}}^\pm(x) = e^{\pm ipx} \quad \text{mit} \quad p^0(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad (2.38)$$

wobei der Energie-Impuls-Zusammenhang $p^0(\vec{p})$ dem eines Teilchens mit Masse m und Impuls \vec{p} entspricht. Diese Lösungen bilden zusammen einen vollständigen Satz linear unabhängiger Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung, was auf folgende Fourier-Darstellung der allgemeine Lösung von (2.37) führt:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0(\vec{p})} [a(p)e^{-ipx} + a^*(p)e^{+ipx}]. \quad (2.39)$$

Aufgrund der Wahl eines Poincaré-invarianten Integralmaßes müssen auch die Amplitudenfunktionen $a(p)$ und $a^*(p)$ Poincaré-invariant sein.

Symmetrie-Transformationen von \mathcal{L} :

Die Lagrangedichte \mathcal{L} ist invariant unter

- allen Poincaré-Transformationen,
- $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$ (innere, diskrete Symmetrie).

Aus den kontinuierlichen Poincaré-Transformationen (Translationen, Drehungen und Boosts) ergeben sich gemäß Gl. (2.34) entsprechende Noetherströme. Die korrespondierenden Erhaltungsgrößen sind hierbei der Viererimpuls, der Drehimpuls und die Schwerpunktsbewegung.

Beispiel Translationen:

\mathcal{L} und d^4x sind separat invariant. Deshalb verschwindet der mögliche Term f_A^μ in (2.34). Die infinitesimalen Transformation der Koordinaten x und des Feldes $\phi(x)$ lauten:

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x^\mu + \delta a^\mu = \delta^\mu_\nu \delta a^\nu, \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \Rightarrow \delta\phi(x) = 0. \end{aligned}$$

Damit identifizieren wir $X_\nu^\mu(x) = \delta_\nu^\mu$ und $\Psi_\nu(x) = 0$. Der Index A ist hier ein Lorentzindex (ν). Wir erhalten aus (2.34) 4 Noetherströme: $\mathcal{J}_\nu^\mu := (\partial^\mu\phi)(0 - \delta_\nu^\delta\partial_\delta\phi) + \mathcal{L}\delta_\nu^\mu - 0$, oder

$$T^{\mu\nu} := -\mathcal{J}^{\mu\nu} = (\partial^\mu\phi)(\partial^\nu\phi) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (2.40)$$

den Energie-Impuls-Tensor bzw. die Vierer-Impulsstromdichte. Es ist eine einfache Übung sich mit Hilfe der Klein-Gordon-Gleichung zu überzeugen, daß in der Tat

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

gilt. Die zugehörige Erhaltungsgröße ist der Gesamt-Vierer-Impuls des Feldes:

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} = \int d^3x [(\partial^0\phi)(\partial^\mu\phi) - g^{0\mu}\mathcal{L}].$$

Komplexes Skalarfeld

Die Lagrangedichte eines freien, komplexen (bzw. „geladenen“) Skalarfeldes ($\phi \neq \phi^*$) ist

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*) = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi,$$

beziehungsweise mit $\phi_1 = \text{Re}(\phi)$, $\phi_2 = \text{Im}(\phi)$ gilt auch

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) - m^2\phi_1^2 + (\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2) - m^2\phi_2^2.$$

Damit ergeben sich die Feldgleichungen zu

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad (\square + m^2)\phi^*(x) = 0$$

bzw. $(\square + m^2)\phi_i(x) = 0$ ($i = 1, 2$), d.h. ϕ und ϕ^* bzw. Real- und Imaginärteil des komplexen Skalarfeldes erfüllen die Klein-Gordon-Gleichung. Für die allgemeine Lösung läßt sich wieder eine Fourier-Darstellung angeben:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0(\vec{p})} [a(p) \cdot e^{-ipx} + b^*(p) \cdot e^{+ipx}]. \quad (2.41)$$

Im Unterschied zur allgemeinen Lösung des reellen Skalarfelds in Gl. (2.39), sind die Amplituden a und b^* hier nun voneinander unabhängig.

Symmetrie-Transformationen von \mathcal{L} :

- alle Poincaré-Transformationen,
- die kontinuierliche Transformation $\left\{ \begin{array}{l} \phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi \\ \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha}\phi^* \end{array} \right\}$ mit $\alpha \in \mathbf{R}$ (innere Symmetrie bezüglich der Gruppe $U(1)$),
- die Transformation: $\phi \rightarrow \phi^*$ (innere diskrete Symmetrie).

Aus der kontinuierlichen inneren Symmetrie erhält man in Vergleich zum reellen Skalarfeld einen zusätzlichen neuen Typ Noetherstrom. Die infinitesimale Transformation lautet:

$$\begin{array}{ll} x^\mu \rightarrow x^\mu & \Rightarrow X^\mu = 0, \\ \phi(x) \rightarrow \phi'(x') = (1 + i\delta\alpha)\phi(x) & \Rightarrow \Psi(x) = i\phi(x), \\ \phi^*(x) \rightarrow \phi^{*\prime}(x') = (1 - i\delta\alpha)\phi^*(x) & \Rightarrow \Psi^*(x) = -i\phi^*(x). \end{array}$$

Damit folgt aus (2.34) für den erhaltenen Strom j^μ

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \Psi^* = i [(\partial^\mu \phi^*) \phi - \phi^* (\partial^\mu \phi)]. \quad (2.42)$$

Die zugehörige erhaltene Ladung ist dann:

$$Q = \int d^3x j^0(x) = i [(\partial^0 \phi^*) \phi - \phi^* (\partial^0 \phi)].$$

Unter Verwendung der Feldgleichungen läßt sich leicht nachprüfen, daß in der Tat

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

gilt. Unter der diskreten Transformation $\mathcal{C} : \phi \rightarrow \phi^*$ wechselt die Ladung Q ihr Vorzeichen,

$$Q \xrightarrow{\mathcal{C}} -Q,$$

weshalb wir diese auch als „Ladungskonjugation“ bezeichnen wollen. Die Felder ϕ und ϕ^* repräsentieren also zwei innere Freiheitsgrade, die Teilsysteme mit entgegengesetzter Ladung beschreiben. Später, nach Einführung der elektromagnetischen Wechselwirkung, können wir j^μ mit der elektrischen Stromdichte identifizieren.

2.3.2 Vektorfelder

Sei A_μ ein neutrales Vektorfeld, d.h. $A_\mu = A_\mu^*$. Das Transformationsverhalten unter einer Poincaré-Transformation ist

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

Die Lagrangedichte des freien Feldes lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu, \quad (2.43)$$

mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und einem Massenparameter M . Für $M = 0$ erhält man die Lagrangedichte der Elektrodynamik im Vakuum.

Fall $M \neq 0$:

Die Feldgleichung für das „massive“ Vektorfeld lautet (Proca-Gleichung):

$$[g_{\mu\nu}(\square + M^2) - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu(x) = 0. \quad (2.44)$$

Durch anwenden einer Ableitung ∂^μ auf die Gleichung folgt, da $M \neq 0$, unmittelbar [siehe 2. Übungsblatt]:

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0. \quad (2.45)$$

Zur Lösung der Proca-Gleichung machen wir einen Ansatz mit ebenen Wellen,

$$A^\mu(x) = a^\mu(k)e^{ikx},$$

mit einem x -unabhängigen Polarisationsvektor $a^\mu(k)$. Damit folgt nun aus der Feldgleichung (2.44)

$$(-k^2 + M^2)a_\mu(k) + k_\mu(k \cdot a(k)) = 0. \quad (2.46)$$

Aus der Eigenschaft des Vektorfeldes $\partial_\mu A^\mu = 0$, Gl. (2.45), folgt andererseits bereits

$$k \cdot a(k) = 0. \quad (2.47)$$

Damit wird Gl. (2.46) zu

$$(-k^2 + M^2)a_\mu(k) = 0$$

und damit folgt für nicht-triviale Lösungen $a_\mu(k) \neq 0$: eine Beziehung zwischen Energie und Impuls der Wellenlösung

$$k^2 = M^2 \quad \text{bzw.} \quad k^0(\vec{k}) = \pm \sqrt{M^2 + \vec{k}^2}.$$

Gleichung (2.47) schränkt die möglichen Polarisationsrichtungen $a^\mu(k)$ auf einen 3-dimensionalen Unterraum des Minkowskiraums ein. Für die Mannigfaltigkeit der erlaubten Polarisationsvektoren $a^\mu(k)$ läßt sich folgende Basisdarstellung angeben:

$$a^\mu(k) = \sum_{\lambda=1}^3 a_\lambda(k) \varepsilon_\lambda^\mu(k)$$

mit

$$\varepsilon_1^\mu(k) = (0, \vec{\varepsilon}_1(k)), \quad \varepsilon_2^\mu(k) = (0, \vec{\varepsilon}_2(k)), \quad \varepsilon_3^\mu(k) = \left(\frac{|\vec{k}|}{M}, \frac{k^0}{M} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right),$$

und

$$\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2,$$

für einen gegebenen Vierervektor $k = (k^0, \vec{k})$. Damit sind die Polarisationsvektoren raumartig und im Minkowski-Raum orthonormiert, d.h. es gilt:

$$\varepsilon_{\lambda,\mu}(k) \varepsilon_{\lambda'}^\mu(k) = -\delta_{\lambda\lambda'}.$$

Die allgemeine Lösung des Vektorfeldes kann nun als Fourierintegral mit Amplitudenfunktionen $a_\lambda(k)$ und $a_\lambda^*(k)$ geschrieben werden:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3k}{2k^0(\vec{k})} [a_\lambda(k) \varepsilon_\lambda^\mu(k) e^{-ikx} + a_\lambda^*(k) \varepsilon_\lambda^\mu(k) e^{+ikx}]. \quad (2.48)$$

Fall $M = 0$:

Für das „masselose“ Vektorfeld ergibt sich aus (2.43) die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.49)$$

und die zugehörige Feldgleichung ergibt sich zu

$$[g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu]A^\nu(x) = 0. \quad (2.50)$$

Das Anwenden einer Ableitung ∂^μ auf die Feldgleichung liefert im Fall $M = 0$ keine Bedingung an das Vektorfeld, sondern eine Identität,

$$[\partial_\nu\square - \square\partial_\nu]A^\nu = 0,$$

welche unabhängig von der Feldkonfiguration $A^\mu(x)$ erfüllt ist.

Im Unterschied zur Lagrangedichte des massiven Vektorfeldes besitzt die Lagrangedichte (und damit natürlich auch die Wirkung) des masselosen Vektorfeldes einen besonderen Typ Symmetrie:

Eichsymmetrie

\mathcal{L} beziehungsweise die Feldgleichungen sind symmetrisch unter der Transformation

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu\lambda(x) \quad (2.51)$$

mit einer beliebigen, von der Raum-Zeit-Koordinate x abhängigen Funktion $\lambda(x)$.

Es ist einfach zu sehen, daß bereits der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ unter der Transformation (2.51) invariant ist. Die Besonderheit dieser Symmetrie ist, daß die weitreichende Invarianz bezüglich einer beliebig wählbaren Funktion $\lambda(x)$ letztlich bedeutet, daß ein dynamischer Freiheitsgrad dieser Theorie einer Symmetrietransformation entspricht und somit keine physikalische Bedeutung hat.

Weiterhin ist auch im masselosen Fall die 0-Komponente des Feldes $A^0(x)$ kein dynamischer Freiheitsgrad, da in der Lagrangedichte — und damit auch in der Feldgleichung — keine Zeitableitung von $A^0(x)$ vorkommt.

(HIER ENDET Z.ZT. DIE UEBERARBEITUNG DES TEXTES)

Wir suchen nun nach einer Lösung von (2.50) und beginnen mit dem Ansatz

$$A^\mu(x) = a^\mu(k)e^{ikx}$$

Daraus folgt sofort aus (2.50)

$$-k^2a_\mu(k) + k_\mu k_\nu a^\nu = 0 \quad (2.52)$$

Wir suchen nun für $a^\mu(k)$ eine allgemeine Linearkombination im Minkowski Raum

$$a^\mu(k) = \sum_{\lambda=1}^2 a_\lambda \varepsilon_\lambda^\mu(k) + \gamma k^\mu + \beta r^\mu$$

wobei gilt:

$\varepsilon_\lambda^\mu(k) = (0, \vec{\varepsilon}_\lambda)$, mit der Randbedingung $\vec{\varepsilon}_\lambda \vec{k} = 0$, und $\vec{\varepsilon}_1 \vec{\varepsilon}_2 = 0$.

Weiterhin ist $r^\mu = (k^0, -\vec{k})$, linear unabhängig zu ε_λ und k .

Man überzeugt sich leicht, dass $r \cdot k = (k^0)^2 + \vec{k}^2 \neq 0$, für $k^\mu \neq (0, \vec{0})$.

Setzen wir diese Definitionen in (2.52) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} -k^2(a_\lambda \varepsilon_\lambda^\mu + \gamma k^\mu + \beta r^\mu) + k^\mu(\gamma k^2 + \beta r \cdot k) = \\ -k^2(a_\lambda \varepsilon_\lambda^\mu + \beta r^\mu) + k^\mu(r \cdot k)\beta = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Als Übung kann man sich überzeugen, dass aus (2.53) folgt, dass $\beta = 0$ gilt.

Damit folgt wiederum $k^2 = 0$ und somit

$$k^0(\vec{k} = \pm |\vec{k}| k_\nu a^\nu(k) = \gamma k^2 = 0 \quad (2.54)$$

Aus (2.54) folgt dann als allgemeine Lösung für a^μ

$$a^\mu(k) = \sum_{\lambda=1,2} a_\lambda(k) \varepsilon_\lambda^\mu(k) + \gamma(k) k^\mu. \quad (2.55)$$

Mit (2.55) kann man dann die allgemeine Lösung von (2.50) angeben:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3 k}{2k^0(\vec{k})} [a_\lambda(k) \varepsilon_\lambda^\mu(k) e^{-ikx} + a_\lambda^*(k) \varepsilon_\lambda^\mu(k) e^{+ikx}] + \\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{2k^0(\vec{k})} [\gamma(k) k^\mu(k) e^{-ikx} + \gamma^*(k) k^\mu(k) e^{+ikx}] \end{aligned}$$

Die a_λ beinhaltenden Terme bezeichnet man auch als transversale Polarisationszustände ($=: A_{Ph}^\mu(x)$), die $\gamma(k)$ beinhaltenden Terme stellen die longitudinalen Polarisationszustände entlang des Ausbreitungsvektors k dar.

Behauptung

Die Longitudinalen Polarisationszustände sind unphysikalisch \Leftrightarrow Die Vektorfelder sind symmetrisch unter der Eichtransformation (2.51).

Beweis

$$\int \frac{d^3 k}{2k^0(\vec{k})} [\gamma(k) k^\mu(k) e^{-ikx} + \gamma^*(k) k^\mu(k) e^{+ikx}]$$

$$= \partial^\mu \int \frac{d^3 k}{2k^0(\vec{k})} [i \cdot \gamma(k) e^{-ikx} - i \cdot \gamma^*(k) e^{+ikx}] = {}^5 \partial^\mu \lambda$$

Eine Veränderung in $\gamma(k)$ führt zu einer Veränderung von A^μ durch eine Eichtransformation. Physikalisch Beobachtbar ist $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \partial^\mu A_{phys}^\nu - \partial^\nu A_{phys}^\mu$.

Damit sind sämtliche physikalischen Zustände eines masselosen Vektorfeldes gegeben durch

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3 k}{2k^0(\vec{k})} [a_\lambda(k) \varepsilon_\lambda^\mu(k) e^{-ikx} + a_\lambda^*(k) \varepsilon_\lambda^\mu(k) e^{+ikx}]$$

Mit $k^2 = 0$, $\varepsilon_\lambda^\mu(k) = (0, \vec{\varepsilon}_\lambda)$, $\vec{\varepsilon}_\lambda \vec{k} = 0$, $\vec{\varepsilon}_1 \vec{\varepsilon}_2 = 0$. Die Wahl der Polarisationsvektoren ist **nicht** kovariant.

2.3.3 Dirac-Felder

Ein Feld Ψ wird als Dirac-Feld bezeichnet, wenn ihm eine feste Masse m , ein Spin 1/2 und Invarianz bezüglich Raumspiegelung zugeordnet wird.

Das Dirac-Feld ist $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix}$, wobei die Ψ_i als Spinoren bezeichnet werden.

Die Dirac-Felder erfüllen die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 \quad (2.56)$$

Mit den Gamma-Matrizen $(\gamma^\mu) = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. Diese sind 4×4 -Matrizen im Spinorraum und sie erfüllen die sogenannte Clifford Algebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \cdot g^{\mu\nu} \cdot 1_{2 \times 2} \quad (2.57)$$

Es gilt für die kovarianten Gamma-Matrizen

$$\gamma_\mu := g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3)$$

Außerdem definieren wir

$$\gamma_5 = i \cdot \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \Rightarrow \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$$

Die Gamma-Matrizen haben die explizite Form $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$, mit σ_k : Pauli Matrix.

⁵Da $[i \cdot \gamma(k) e^{-ikx} - i \cdot \gamma^*(k) e^{+ikx}]$ ist

$$\Rightarrow \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

Es gibt jedoch weitere Darstellungen der Gamma-Matrizen. Jede unitäre Transformation U , $\gamma^\mu \rightarrow \gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}$, erhält die Form der Dirac-Gleichung (2.56) und der Clifford-Algebra (2.57) und liefert somit eine gültige Darstellung (γ'^μ) der Gamma-Matrizen.

Beispiel: Dirac-Darstellung $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, $\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$.

Der Adjungierte Spinor

Wir definieren den adjungierten Spinor

$$\bar{\Psi}(x) := \Psi^\dagger \gamma^0 = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*) \gamma^0 \quad (2.58)$$

Dabei gilt $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, und $(\gamma^k)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k^\dagger \\ -\sigma_k^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$

Damit folgt im Allgemeinen

$$(\gamma^k)^\dagger = \gamma^0 \gamma^k \gamma^0$$

Lagrangedichte

Man kann eine Lagrangedichte definieren, aus der sich dann die Dirac-Gleichung ableiten lässt. Diese hat dann folgende Gestalt:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = \sum_{a,b=1}^4 \bar{\Psi}_a(x)(i(\gamma^\mu)_{ab} \partial_\mu - m\delta_{ab})\Psi_b(x) \quad (2.59)$$

Mit (2.59) ergeben sich dann folgende Feldgleichungen, die mit (2.56) äquivalent sind:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi}_a)} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi_a = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_a)} = \bar{\Psi}_a (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = 0$$

Transformationsverhalten

Das Transformationsverhalten der Dirac-Felder unter einer Poincare-Transformation ist

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x') = S(\Lambda) \cdot \Psi(x)$$

speziell die Darstellung der Lorentz-Transformation

$$S(\Lambda) = e^{-i/2\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}}$$

mit $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ und damit $\Sigma_{\mu\nu}^+ = \gamma^0 \Sigma_{\mu\nu} \gamma^0$.

Daher gilt für $S(\Lambda)^{-1} = \gamma^0 S^+ \gamma^0$ ist **nicht** unitär, wie sich leicht zeigen lässt.

Es gilt

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$$

Als Übung kann man sich davon überzeugen, dass \mathcal{L} unter einer Lorentz-Transformation invariant bleibt.

Eine Auflistung Kovarianter Größen

- $\bar{\Psi}\Psi$, Skalar
- $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$, Vektor
- $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$, Pseudoskalar (-1 bei Raumspiegelung)
- $\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$, Tensor Zweiter Stufe, mit $\sigma^{\mu\nu} := i/2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$
- $\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi$, Pseudovektor (wird auch als Axialvektor bezeichnet)

Die Basis im Raum der γ -Matrizen enthält 16 Vektoren: $\{1_{4\times 4}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma_5, \gamma^\mu\gamma_5\}$.

Raumspiegelung

Sei P der Operator der Raumspiegelung \mathcal{P} . Dann gilt für die Raum-Zeit-Koordinate x

$$x = (x^0, \vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{P}} x' = (x^0, -\vec{x})$$

Wobei $x'^\mu = P^\mu_\nu x^\nu$, und $(P^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist.

Desweiteren gilt für das Feld Ψ :

$$\Psi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \Psi'(x') = P\Psi(x)$$

Wir bestimmen \mathcal{P} in der Spinorraum-Darstellung: $P^{-1}\gamma^\mu P = \begin{cases} \gamma^0 \\ -\gamma^k \end{cases}$

Damit gilt für den Strom $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = (j^0, \vec{j}) \xrightarrow{\mathcal{P}} (j^0, -\vec{j})$.

Es gilt im Allgemeinen $P^\dagger P = 1$ womit man P auch angeben kann als $P = e^{i\eta\gamma^0}$, mit nicht festgelegtem η .

Wir untersuchen nun die Auswirkung der Raumspiegelung auf die Felder im Detail:

$$\Psi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} e^{i\eta\gamma^0}\Psi(x)$$

Hiermit folgt für das Adjungierte Feld

$$\bar{\Psi}(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \Psi^\dagger(x)e^{-i\eta}$$

Damit ergibt sich für die kovarianten Größen:

- Skalar: $\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \Psi^\dagger(x)e^{-i\eta}\gamma^0 e^{i\eta}\Psi(x) = \bar{\Psi}\Psi$
- Vektor: $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \Psi^\dagger(x)e^{-i\eta}\gamma^0\gamma^\mu e^{i\eta}\Psi(x) = \begin{cases} \bar{\Psi}\gamma^0\Psi \\ -\bar{\Psi}\gamma^k\Psi \end{cases}$
- Axialvektor: $\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \begin{cases} -\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^0\Psi \\ \bar{\Psi}\gamma_5\gamma^k\Psi \end{cases}$

\mathcal{L} hat nun unter der Raumspiegelung \mathcal{P} eine kontinuierliche, innere Symmetrie:

$$\begin{aligned} \Psi &\xrightarrow{\mathcal{P}} e^{i\alpha}\Psi \\ \bar{\Psi} &\xrightarrow{\mathcal{P}} e^{-i\alpha}\bar{\Psi} \end{aligned}$$

Mit $\alpha \in \mathcal{R}$, die zugehörige Gruppe ist die $U(1)$. Damit folgt für den Noetherstrom

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (2.60)$$

Ladungskonjugation

Die Ladungskonjugation ist im Gegensatz zur Raumspiegelung eine diskrete Symmetrie. Für die Lagrangedichte \mathcal{L} gilt dann, wenn \mathcal{C} der Operator der Ladungskonjugation ist

$$\Psi(x) \xrightarrow{\mathcal{C}} \Psi^c(x) = \mathcal{C}\bar{\Psi}^\dagger(x)$$

wobei gilt

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^\dagger \quad (2.61)$$

In direkter Dirac-Darstellung ist

$$\mathcal{C} = i \cdot \gamma^2 \gamma^0$$

wählerline. In jeder Darstellung gibt es eine Matrix \mathcal{C} , so dass (2.61) erfüllt ist.

$$\overline{\Psi} \rightarrow \overline{\Psi}^c = \overline{(\mathcal{C}\overline{\Psi}^\dagger)} = (\mathcal{C}\overline{\Psi}^\dagger)^\dagger \gamma^0 = (\overline{\Psi}^* \mathcal{C}^\dagger) \gamma^0$$

$$= (\Psi^\dagger \gamma^0)^* \mathcal{C}^\dagger \gamma^0 = \Psi^\dagger (\gamma^0)^* \mathcal{C}^\dagger \gamma^0$$

Mit $\mathcal{C} = i \cdot \gamma^2 \gamma^0$, $(\gamma^0)^* = \gamma^0$ und $\mathcal{C}^\dagger = -i(\gamma^0)^\dagger (\gamma^2)^\dagger = -i\gamma^2 \gamma^0$, ergibt sich

$$\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 (-i) \gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 = -\Psi^\dagger \mathcal{C}^\dagger$$

Untersuchen wir nun das Verhalten der Felder unter der U(1) Transformation

$$\Psi^c \rightarrow e^{-1\alpha} \Psi^c$$

$$\overline{\Psi}^c \rightarrow e^{-1\alpha} \overline{\Psi}^c$$

Wie sich leicht feststellen lässt, sind \mathcal{L} und der Noetherstrom unter der Transformation \mathcal{C} invariant. Es gilt

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{L}$$

$$j^\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} j^\mu$$

In der Quanten Feldtheorie sind Ψ und $\overline{\Psi}$ antikommutierend. Dann gilt für den Noetherstrom

$$j^\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -j^\mu$$

Lösungen der Dirac-Gleichung

1. $\Psi(x) = e^{-ipx} \cdot u(p)$, $p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$, mit der Notation: $\not{p} := \gamma^\mu a_\mu = a^\mu \gamma_\mu$
Einsetzen in die Dirac-Gleichung (2.56) liefert

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \tag{2.62}$$

und aus (2.62) folgen zwei linear unabhängige Lösungen: $u_r(p)$, mit $r = 1, 2$.

2. $\Psi(x) = e^{ipx} \cdot v(p)$, $p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$
Einsetzen in die Dirac-Gleichung (2.56) liefert hier ebenfalls

$$(\not{p} - m)u(p) = 0$$

und zwei weitere (von 1. unabhängige) Lösungen $v_r(p)$, mit $r = 1, 2$.

Diese Lösungen haben bei geeigneter Normierung folgende Eigenschaften:

- Orthogonalität:

$$\bar{u}_r(p)u_{r'}(p) = 2m \cdot \delta_{rr'}$$

$$\bar{v}_r(p)v_{r'}(p) = 2m \cdot \delta_{rr'}$$

- Vollständigkeit:

$$\sum_{r=1}^2 u_r(p)\bar{u}_r(p) = \not{p} + m$$

$$\sum_{r=1}^2 v_r(p)\bar{v}_r(p) = \not{p} - m$$

Daraus folgt

$$\sum_{r=1}^2 u_r(p)\bar{u}_r(p) - v_r(p)\bar{v}_r(p) = 2m \cdot 1_{2 \times 2}$$

$$\sum_{r=1}^2 u_r(p)\bar{u}_r(p) + v_r(p)\bar{v}_r(p) = 2 \not{p}$$

Weiterhin gilt

$$u_r(p)u_{r'}(p) = 2p^0 \cdot \delta_{rr'}$$

$$v_r(p)v_{r'}(p) = 2p^0 \cdot \delta_{rr'}$$

Mit den genannten Eigenschaften ergibt sich die Allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung (2.56) zu

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}} \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{2p^0(\vec{p})} \{ c_r(p)u_r(p) \cdot e^{-ipx} + d_r^*(p)v_r(p) \cdot e^{ipx} \} \quad (2.63)$$

2.4 Wechselwirkende Felder

Die freien Feldgleichungen ergeben sich durch Anwendung des linearen Differentialoperators \mathcal{D} auf die Felder $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$.

Der Spezialfall der homogenen Gleichung ist dann

$$\mathcal{D}\phi(x) = 0 \quad (2.64)$$

und die Feldgleichung mit Wechselwirkung wird zur inhomogenen Gleichung

$$\mathcal{D}\phi(x) = \mathcal{J}(x) \quad (2.65)$$

wobei für $\mathcal{J}(x)$ gilt $\left\{ \begin{array}{ll} \text{(a) vorgegebene Fkt} & \rightarrow \text{WW mit externem Feld} \\ \text{(b) nicht lin. Fkt der Felder} & \rightarrow \text{WW der Felder untereinander} \\ & \text{und Selbst-WW} \end{array} \right.$

Die Methode der Greenschen Funktionen liefert im Falle

(a) eine exakte Lösung

(b) eine Integralgleichung, welche die exakte Lösung $\phi(x)$ erfüllen muss \Rightarrow Störungstheorie

Methode der Greenschen Funktionen

Sei $G(x - y)$ ⁶ eine Lösung von

$$\mathcal{D}_x G(x - y) = \delta^4(x - y)$$

unter bestimmten Randbedingungen. Dann ist

$$\phi(x) = \int d^4y G(x - y) \mathcal{J}(y)$$

eine Lösung der inhomogenen Feldgleichung (2.65). Die Greensche Funktion $G(x - y)$ lässt sich im Allgemeinen nicht als Fourierintegral angeben.

2.4.1 Greensche Funktionen gängiger Feldgleichungen

Klein-Gordon-Gleichung

Es gelte $\phi^*(x) = \phi(x)$ (neutrale Felder). Dann ist

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \tag{2.66}$$

Die sogenannte Klein-Gordon-Gleichung. Wir definieren $G(x - y)$ durch

$$(\square + m^2)G(x - y) = -\delta^4(x - y) \tag{2.67}$$

wobei das Vorzeichen der Delta-Funktion Konvention ist. Wenn nun $G(x - y)$ die Gleichung (2.67) löst, dann ist mit ϕ_0 , welches die Klein-Gordon-Gleichung (2.66) erfüllt, auch die Kombination

$$G(x - y) + \phi_0$$

eine Lösung der Gleichung (2.67). Durch Spezielle Wahl von ϕ_0 kann eine Greensche Funktion zu spezifischen Randbedingungen bestimmt werden.

Ansatz:

Wir stellen die Fourier-Transformierte von $G(x - y)$ auf:

$$G(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x-y)} \tilde{G}(q)$$

⁶Bemerkung: wir verwenden immer x-y, da Translationsinvarianz gilt

Es gilt: $\delta^4(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x-y)}$, womit aus (2.67) folgt

$$\int d^4q (-q^2 + m^2) e^{-iq(x-y)} \tilde{G}(q) = - \int d^4q e^{-iq(x-y)}$$

Damit folgt für $\tilde{G}(q)$: $(-q^2 + m^2)\tilde{G}(q) = -1$. Damit ergibt sich für $q^2 \neq m^2$

$$\tilde{G}(q) = \frac{1}{q^2 - m^2}$$

Nun lässt sich die Greensche Funktion von (2.67) wie folgt angeben:

$$G(x-y) = \int d^4q \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 - m^2} \quad (2.68)$$

Die Lösung von (2.67) hat nun folgende Eigenschaften:

- $G(x-y)$ ist undefiniert wegen der Pole $q^2 = m^2$
- $q^2 = m^2$ entspricht einer Lösung der freien Gleichung. Aus der Integration von q^0 folgt: $q^0 = \pm \sqrt{m^2 + \vec{q}^2}$
- Die Wahl einer Vorschrift zur Umgehung der Pole in (2.68) entspricht der Wahl einer Randbedingung für G .

Um die Pole zu umgehen führen wir eine infinitesimale Deformation der q^0 -Integration in die komplexe Ebene durch. Dies entspricht einer infinitesimalen Verschiebung der Pole in die komplexe Ebene.

Wir haben folgende Möglichkeiten:

hier
gehört
ein
Bild
rein

Fall 1

$$G_1(x-y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^3q e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \frac{e^{-iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 - \sqrt{m^2 + \vec{q}^2} - i\varepsilon)(q^0 + \sqrt{m^2 + \vec{q}^2} - i\varepsilon)}$$

Wir definieren $I := \int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \frac{e^{-iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 - \sqrt{m^2 + \vec{q}^2} - i\varepsilon)(q^0 + \sqrt{m^2 + \vec{q}^2} - i\varepsilon)}$. Dann gilt $I = \begin{cases} a) & x^0 > y^0 \\ b) & x^0 < y^0 \end{cases}$,
mit

a) $Re(-iq^0(x^0 - y^0)) < 0$ falls $Im(q^0) < 0$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R dq^0 f_\varepsilon(q^0) = 0, \text{ wobei } f_\varepsilon(q^0) = \frac{e^{-iq^0(x^0 - y^0)}}{(q^0 - \sqrt{m^2 + \vec{q}^2 - i\varepsilon})(q^0 + \sqrt{m^2 + \vec{q}^2 - i\varepsilon})}.$$

Das bedeutet, es liegen keine Pole im umrandeten Gebiet.

b) $Re(-iq^0(x^0 - y^0)) < 0$ falls $Im(q^0) > 0$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R dq^0 f_\varepsilon(q^0) = 0$$

$$\dots = \lim_{R \rightarrow \infty} \int dq^0 f_\varepsilon(q^0) = 2\pi i \cdot [Res_{q^0}(f_\varepsilon(q^0))|_{q^0 = \sqrt{\dots} + i\varepsilon} + Res_{q^0}(f_\varepsilon(q^0))|_{q^0 = -\sqrt{\dots} + i\varepsilon}]$$

Allgemein Residuum für die k'te Ordnung:

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]|_{z=z_0}$$

$$\text{Damit folgt } I = 2\pi i \left[\frac{e^{-iq^0(x^0 - y^0)}}{q^0 + \sqrt{\dots - i\varepsilon}} \Big|_{q^0 = \sqrt{\dots} - i\varepsilon} + \frac{e^{-iq^0(x^0 - y^0)}}{q^0 - \sqrt{\dots - i\varepsilon}} \Big|_{q^0 = -\sqrt{\dots} - i\varepsilon} \right]$$

$$\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{2\pi i}{2q^0(\vec{q})} \left[e^{-iq^0(x^0 - y^0)} - e^{iq^0(x^0 - y^0)} \right], \quad q^0(\vec{q}) = +\sqrt{m^2 + \vec{q}^2}$$

Daraus folgt dann mit a) und b):

$$G_1(x - y) = \Theta(y^0 - x^0) \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{2q^0} \{ e^{-i1(x-y)} - e^{i1(x-y)} \} \quad (2.69)$$

Interpretation von (2.69): $G_1(x - y) \neq 0$, falls y^0 später als x^0 ist. Damit ergibt sich die Lösung der inhomogenen Gleichung (2.65), mit $\mathcal{D} = (\square + m^2)$ zu

$$\phi(x) = \int d^4 x G_1(x - y) \mathcal{J}(y)$$

Dies bedeutet soviel, dass $\phi(x)$ zum Zeitpunkt x^0 durch die zukünftige Konfiguration von $\mathcal{J}(y)$ ausgedrückt werden kann. Deshalb wird $G_1(x - y)$ auch als *avancierte* Greensche Funktion bezeichnet.

Fälle 2, 3 und 4

Diese Fälle werden analog zu Fall 1 behandelt.

$$\text{Fall 2: } G_2(x - y) = G_{ret}(x - y) = \Theta(x^0 - y^0) \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{2q^0} \{ e^{-i1(x-y)} - e^{i1(x-y)} \}$$

$$\text{Fall 3: } G_3(x - y) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{2q^0} \{ \Theta(x^0 - y^0) e^{-i1(x-y)} - \Theta(y^0 - x^0) e^{i1(x-y)} \}$$

$$\text{Fall 4: } G_3(x - y) = D(x - y) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{2q^0} \{ \Theta(x^0 - y^0) e^{-i1(x-y)} - \Theta(y^0 - x^0) e^{i1(x-y)} \}$$

Kausale Greensche Funktionen

$$\Theta(a - b) = 1 - \Theta(b - a) \rightarrow G_{ret} = G_{av} + \phi_0$$

Analogiebetrachtung zur Interpretation der Greenschen Funktionen in der 1-Teilchen Quantenmechanik

Wir betrachten die Lösung der inhomogenen Feldgleichung (2.65)

$$\phi(x) = \int d^4y' G(x - y') \mathcal{J}(y')$$

Sei nun $\mathcal{J}(y') = \mathcal{J}_0 \delta^4(y - y')$, dann folgt für das Feld

$$\phi_y(x) = G(x - y) \mathcal{J}_0$$

Alle $\phi_y^i(x)$ sind zusammengesetzt aus

$$f_{\vec{q}}^{\mp}(x) = e^{\mp i q(x-y)}$$

Wir interpretieren $\phi_y^i(x)$ als Wellenfunktion, die durch die Störung (der Inhomogenität) am Punkt y generiert wird.

Die Energie ergibt sich in der Quantenmechanik durch den Hamilton-Operator $H = i \frac{\partial}{\partial x^0}$. Damit ergibt sich die Energie

$$H f_{\vec{q}}^{\mp}(x) = \pm q_0 f_{\vec{q}}^{\mp}(x)$$

Aus der Schrödingergleichung für die $f_{\vec{q}}^{\mp}(x)$. Dabei lässt die Lösung sowohl positive wie auch negative Energie-Eigenwerte zu.

1.)

Damit $\phi_y^1(x) \neq 0$ muss $y^0 > x^0$ gelten \rightarrow Propagation rückwärts in der Zeit
 $G^1(x - y)$ enthält $f_{\vec{q}}^{\mp}(x) \rightarrow$ mit Energie $E > 0$ und $E < 0$

2.)

$y^0 < x^0$ (immer) \rightarrow Propagator vorwärts idZ, $E > 0$ und $E < 0$

3.)

$y^0 < x^0 \rightarrow f_{\vec{q}}^+(x) \rightarrow$ Propagator vorwärts idZ, $E < 0$

$y^0 > x^0 \rightarrow f_{\vec{q}}^-(x) \rightarrow$ Propagator rückwärts idZ, $E > 0$

4.)

$y^0 < x^0 \rightarrow f_{\vec{q}}^-(x) \rightarrow$ Propagator vorwärts idZ, $E > 0 \leftrightarrow$ Teilchen

$y^0 > x^0 \rightarrow f_{\vec{q}}^{+-}(x) \rightarrow$ Propagator rückwärts idZ, $E < 0 \leftrightarrow$ Antiteilchen

Proca-Gleichung

Die Proca-Gleichung für ein massives Vektorfeld A^μ mit der Masse M hat die folgende Gestalt

$$[-g_{\mu\nu}(\square + M^2) + \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu = 0 \quad (2.70)$$

Dies definiert uns die zugehörige Greensche Funktion zu

$$[-g_{\mu\nu}(\square + M^2) + \partial_\mu \partial_\nu]G^{\nu\delta}(x-y) = -\delta_\mu^\delta \delta^4(x-y) \quad (2.71)$$

Um diese Greensche Funktion zu lösen machen wir folgenden Ansatz:

$$G^{\nu\rho}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \tilde{G}^{\nu\rho}(q) e^{-iq(x-y)} \quad (2.72)$$

Ersetzen wir nun $\delta^4(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x-y)}$, dann folgt

$$[-g_{\mu\nu}(\square + M^2) + q_\mu q_\nu] \tilde{G}^{\nu\rho}(q) = -g_\mu^\rho$$

Definieren wir $C_{\mu\nu} := [-g_{\mu\nu}(\square + M^2) + q_\mu q_\nu]$, dann folgt $\tilde{G} = (-C)^{-1}$. Wir machen nun den folgenden Ansatz:

$$\tilde{G}^{\nu\rho}(q) = A(q)g^{\nu\rho} + B(q)q^\nu q^\rho \quad (2.73)$$

und setzen diesen in (2.71) ein. Damit ergibt sich für alle q :

$$C_{\mu\nu} \tilde{G}^{\nu\rho} = Ag_\mu^\rho(q^2 - M^2) - Aq_\mu q^\rho + B(q^2 - M^2)q_\mu q^\rho - Bq^2 q_\mu q^\rho \stackrel{!}{=} -g_\mu^\rho$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A(q^2 - M^2) \stackrel{!}{=} -1$, und $A + B \cdot M^2 \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow A = -(q^2 - M^2)^{-1}$$

$$B = [M^2(q^2 - M^2)]^{-1}$$

Mit diesen Koeffizienten lässt sich dann die Fouriertransformierte Greensche Funktion angeben als

$$\tilde{G}^{\nu\rho}(q) = \frac{-g^{\nu\rho} + \frac{q^\nu q^\rho}{M^2}}{q^2 - M^2}$$

Unter der Annahme, dass die Polstellen $q^2 = M^2$ nicht im Integrationsgebiet liegen ergibt sich dann für die Greensche Funktion selber

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2}}{q^2 - M^2 + i\varepsilon} \cdot e^{-iq(x-y)} \quad (2.74)$$

Maxwell-Gleichung

Die freie Maxwell-Gleichung für ein masseloses Vektorfeld A^μ lautet

$$[-g_{\mu\nu}\square + \partial_\mu \partial_\nu]A^\nu(x) = 0 \quad (2.75)$$

Wir versuchen nun, eine Greensche Funktion zu dieser Gleichung zu konstruieren:

$$[-g_{\mu\nu}\square + \partial_\mu \partial_\nu]G^{\nu\rho}(q^2) \stackrel{!}{=} -g_\mu^\rho \delta^4(x-y)$$

Behauptung: $(C_{\mu\nu})$ ist keine reguläre Matrix (d.h. $\det C = 0$) und besitzt somit keine Inverse.

Beweis: q^ν ist Eigenvektor von C zum Eigenwert 0. Dann gilt $C_{\mu\nu}q^\nu = q_\mu q^2 - q_\mu q^2 = 0$ womit folgt dass $\det C = 0$ und deshalb existiert C^{-1} nicht.

Der Differential-Operator der freien Maxwell-Gleichung ist also nicht invertierbar, woraus folgt dass es keine Greensche Funktion gibt, die (2.75) erfüllt.

Dies liegt Begründet in der Eichsymmetrie der Feldgleichung.

Zwei Auswege

1. Einschränkung auf einen Unterraum, auf dem $G_{\mu\nu}$ invertierbar ist. Dies entspricht den physikalischen (\equiv transversalen) Polzuständen).

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{-\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\lambda^\mu(q) \otimes \varepsilon_\lambda^\nu(q)}{q^2 + i\varepsilon} \cdot e^{-iq(x-y)}$$

2. Abänderung der eichinvarianten Theorie, so dass $(C_{\mu\nu})$ invertierbar wird und dass die ursprüngliche Theorie in einer gewissen Eichung reproduziert werden kann. Zum Beispiel mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu) \quad (2.76)$$

der QED mit Eichfixierung.

Aus der Lagrangedichte (2.76) folgt eine Änderung der Feldgleichung der Form

$$[-g_{\mu\nu} \square + (1 + \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu)] A^\nu = 0 \quad (2.77)$$

Diese Feldgleichung bringt eine weitere Lorentz-Bedingung mit sich

$$\partial_{m\mu} A^\mu = 0 \quad (2.78)$$

Die Feldgleichung (2.77) ist äquivalent zur Maxwell-Gleichung in Lorentz-Eichung. Die Nebenbedingung (2.78) legt die eichung nicht eindeutig fest.

Die Eichsymmetrie

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial_\mu \lambda$$

mit $\square \lambda = 0$ hat dagegen **kein** Problem mit der Invertierbarkeit des Differential-Operators in (2.77), da $\partial_\mu \lambda$ mit $\square \lambda = 0$ eine Lösung der freien Feldgleichung ist.

Die Greensche Funktion ergibt sich dann aus (2.77) mit

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} A^\nu = 0$$

wobei $\mathcal{D}_{\mu\nu} = [-g_{\mu\nu}\square + (1 + \frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial_\nu)]$ wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}G^{\nu\rho}(x-y) = -g_\mu^\rho\delta^4(x-y) \quad (2.79)$$

Setzt man nun (2.72) in (2.79) ein, so erhält man

$$[-g_{\mu\nu}q^2 - (1 + \frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial_\nu)]\tilde{G}^{\nu\rho}(q) = -g_\mu^\rho$$

Mit dem Ansatz von (2.73) folgt dann

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(q) = \frac{-g_{\mu\nu} + (1 - \xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\varepsilon}$$

Damit folgt nun für die Greensche Funktion

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \left(\frac{-g_{\mu\nu} + (1 - \xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\varepsilon} \right) e^{-iq(x-y)} \quad (2.80)$$

Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung hat die Gestalt von (2.56)

$$(i\cancel{\partial} - m)_{ab}\Psi_b(x) = 0$$

Sei S_{bc} die Greensche Funktion, welche die Dirac Gleichung (2.56) erfüllt. Dann ist S definiert durch

$$(i\cancel{\partial} - m)_{ab}S_{bc}(x-y) = +\delta_{ac}\delta^4(x-y)$$

Wir betrachten zunächst die Fourier-Transformierte von S_{bc}

$$S_{bc} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \tilde{S}_{bc}(q) e^{-iq(x-y)} \quad (2.81)$$

Setzen wir nun die Fouriertransformierte (2.81) in die Dirac-Gleichung (2.56) ein, so erhalten wir

$$(\cancel{\not{q}} - m)_{ab}\tilde{S}_{bc}(q) \stackrel{!}{=} \delta_{ac}$$

Daraus folgt dann für die Fouriertransformierte $\tilde{S}(q) = 1_{2 \times 2} \cdot \frac{1}{\cancel{\not{q}} - m}$, womit man für die Greensche Funktion schließlich erhält

$$S_{ab}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \left(\frac{(\cancel{\not{q}} + m)_{ab}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-iq(x-y)} \right)$$

Es gilt $\frac{(\cancel{\not{q}} + m)_{ab}}{q^2 - m^2} = \frac{1}{\cancel{\not{q}} - m}$.

⁷Das Vorzeichen ist Konvention

2.4.2 Störungstheorie (Beispiel)

Ein reelles Skalarfeld mit selbst-Wechselwirkung und der Masse m wird durch folgende Lagrangedichte beschrieben:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 + \mathcal{J} \phi \quad (2.82)$$

Aus der Lagrangedichte (2.82) folgt dann die Feldgleichung für freie, reelle Skalare

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{2}\phi^2 + \mathcal{J} \quad (2.83)$$

Die Felder ϕ ebenso wie der Strom \mathcal{J} sind von der Koordinate x abhängig. Sei nun $G(x-y)$ die Greensche Funktion zur Feldgleichung (2.83), mit $(\square + m^2)G(x-y) = \delta^4(x-y)$, dann gilt für das Feld die sogenannte Integralgleichung:

$$\phi = \phi_{frei} + \int d^4y G(x-y) \left(-\frac{\lambda}{2} \phi^2 + \mathcal{J} \right) \quad (2.84)$$

Das Feld ϕ lässt sich nun durch Iteration von (2.84) Näherungsweise bestimmen. Wir entwickeln in Potenzen von \mathcal{J} :

$$\phi = \sum_n^{\infty} \phi_n \quad (2.85)$$

wobei die ϕ_n die Potenzen von \mathcal{J} enthalten. Setzen wir nun (2.85) in (2.84) ein, so erhalten wir

$$\sum_n^{\infty} \phi_n(x) = \int d^4y G(x-y) \left(-\frac{\lambda}{2} \left(\sum_n^{\infty} \phi_n(y) \right)^2 + \mathcal{J} \right)$$

Koeffizientenvergleich liefert⁸

$$\phi_1(x) = \int d^4y G(x-y) \mathcal{J}(y)$$

$$\phi_2(x) = \int d^4y_1 G(x-y_1) \left(-\frac{\lambda}{2} \phi_1(y_1) \right)^2$$

Setzen wir die Definition von ϕ_1 in die Definition von ϕ_2 ein, so folgt

$$\phi_2(x) = \int d^4y_1 \int d^4y_2 \int d^4y_3 G(x-y_1) \left(-\frac{\lambda}{2} \right) \cdot G(y_1-y_2) \mathcal{J}(y_2) \cdot G(y_1-y_3) \mathcal{J}(y_3)$$

Analog erhält man für ϕ_3 : $\phi_3(x) = \int d^4y_1 G(x-y_1) \left(-\frac{\lambda}{2} \right) \cdot 2\phi_1(y_1)\phi_2(y_1) =$
 $-\lambda \left(\prod_{i=1}^5 \int d^4y_i \right) G(x-y_1) [G(y_1-y_2) \mathcal{J}(y_2) G(y_1-y_3) \left(-\frac{\lambda}{2} \right) G(y_3-y_4) \mathcal{J}(y_4) G(y_3-y_5) \mathcal{J}(y_5)]$

⁸Wir setzen $\phi_0 = 0$

Feynmanregeln

Zur Gewinnung von Rechenausdrücken für die Elemente $\phi_n(x)$ der Potenzreihe für $\phi(x)$:

- Zeichne alle zusammenhängenden Diagramme unter Verwendung der Symbole für den Propagator, Vertex und Endpunkte, die genau n -Mal im äußeren Feld „enden“.
- identifiziere die Propagatoren mit den Greenschen Funktionen $G(y_1 - y_2)$, die (Drei-Punkt-)Vertices mit $-\lambda$ und die Endpunkte mit $\mathcal{J}(y)$
- Integriere über alle Punkte außer x im 4-dimensionalen Raum
- Multipliziere Diagramme mit $\frac{1}{N}$, wenn das Diagramm unter N Permutationen der \mathcal{J} 's seine Gestalt beibehält.
- Bilde die Summe aller auf diese Weise entstandenen Diagramme

Kapitel 3

Quantisierte freie Felder

Kanonische Quantisierung

Punktmechanik

Klassisch \rightsquigarrow kanonisch konjugierte Größen $(q_k), (p_k)$ mit $\{p_k, q_l\} = \delta_{kl}$

$$\text{Poissonklammer: } \{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right)$$

\Rightarrow Korrespondenzprinzip \Rightarrow

Quantenmechanisch \rightsquigarrow Operatoren $(\hat{q}_k), (\hat{p}_k)$ mit $[\hat{p}_k(t), \hat{q}_l(t)] = -i\hbar\delta_{kl}$
(Kommutator zu gleichen Zeiten)

\Rightarrow Analogon: $[\hat{p}_k, \hat{q}_k] = \frac{\hbar}{i}\{p_k, q_l\}$

Feldtheorie

Betrachte System zunächst diskretisiert im Ort, d.h.

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}(i, j, k) = i\vec{a}_1 + j\vec{a}_2 + k\vec{a}_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} \longrightarrow \frac{f(\vec{x}(i+1, j, k)) - f(\vec{x}(i, j, k))}{\Delta x^1} =: \frac{\Delta f}{\Delta x^1}$$

$$\int d^3x \longrightarrow \sum_{i, j, k} \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 = \sum_n \Delta V$$

$$1 = \int d^3x \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \longrightarrow \sum_n \Delta V \frac{\delta_{nn'}}{\Delta V}$$

$$\phi(\vec{x}, t) \longrightarrow \phi(\vec{x}_n, t) = \phi_n(t)$$

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x) \longrightarrow \sum_n \Delta V \mathcal{L}(\phi_n, \frac{\Delta \phi_n}{\Delta x^i}, \dot{\phi}_n) \text{ Lagrangefunktion}$$

$$H = \int d^3x (\Pi(x)\partial^0\phi(x) - \mathcal{L}(x)) \longrightarrow \sum_n \Delta V \left(\Pi_n \dot{\phi}_n - \mathcal{L}(\phi_n, \frac{\Delta\phi_n}{\Delta x^i}, \dot{\phi}_n) \right) \text{ Hamiltonfunktion}$$

$$\Pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi(x))} \longrightarrow \Pi_n = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}_n)}$$

zu ϕ_n kanonisch konjugierter Impuls: $p_n = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_n} = \Delta V \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_n}$

Raum diskretisiert und endliches Volumen, dann: kanonische Quantisierung wohldefiniert!

→ Mit $q_n = \phi_n$: q_n und p_n seien Operatoren, die $[\hat{p}_n, \hat{q}_{n'}] = \frac{\hbar}{i}\delta_{nn'}$ und $[\hat{p}_n, \hat{p}_l] = [\hat{q}_n, \hat{q}_l] = 0$ erfüllen.

Daraus: $[\Pi_n(t), \phi_{n'}(t)] = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta_{nn'}}{\Delta V}$

(jetzt $\hbar = 1$, zusätzlich a, b diskrete Indizes)

Im Kontinuumsimes: $[\phi_a(\vec{x}, t), \Pi_b(\vec{x}', t)] = i\delta_{ab}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$
 $[\phi_a(\vec{x}, t), \phi_b(\vec{x}', t)] = [\Pi_a(\vec{x}, t), \Pi_b(\vec{x}', t)] = 0$

mit ganzzahligem Spin (S=0, 1, 2...)

3.1 Skalarfelder

3.1.1 Reelles Skalarfeld

3.1.2 Komplexes Skalarfeld

3.2 Dirac-Felder

3.3 Vektorfelder

3.3.1 Masseloses Vektorfeld

3.3.2 Massives Vektorfeld

3.4 Propagatoren

Kapitel 4

Wechselwirkende Quantenfelder

4.1 Beispiele für Wechselwirkungen

4.2 S -Matrix, Wirkungsquerschnitte und Zerfallsbreiten

4.2.1 S - und T -Matrix

4.2.2 Wirkungsquerschnitt

4.2.3 Zerfallsbreite/Lebensdauer eines Teilchens

4.2.4 Optisches Theorem

4.3 Asymptotische Felder

4.3.1 Asymptotenbedingung

4.3.2 Källén-Lehmann-Darstellung des Propagators

4.3.3 Das LSZ-Theorem (Die Reduktionsformel)

4.4 Störungstheorie und Feynman-Diagramme

4.4.1 Störungstheorie für τ -Funktionen

4.4.2 Wick-Theorem

4.4.3 Beispiel ϕ^3 -Theorie

Kapitel 5

Quantenelektrodynamik

5.1 Lagrangedichte und Feynman-Regeln

5.2 QED-Prozesse in niedrigster Ordnung

5.3 QED in Ein-Schleifen-Ordnung

5.3.1 Struktur von Ein-Schleifen-Amplituden (Beispiel)

5.3.2 Elektron-Selbstenergie